现代数学基础丛书 178

集合论导引

（第一卷：基本理论）

冯　琦　著



献给我的夫人和两个女儿！

现代数学基础丛书 178

集合论导引

(第一卷：基本理论)

冯 琦 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本卷是这本《集合论导引》的开卷，分为三章，是后续两卷的基础．第 1 章主要是引进集合论的基本公理、基本概念、基本方法，并给出典型的可数集合的例子，包括自然数集合、整数集合、有理数集合以及彻底有限集合等．第 2 章主要是引进选择公理以及由此建立起来的基数运算律和一些典型组合实例．第 3 章专门引进实数集合并对它进行系统分析．本卷将建立一系列基本概念，为全书作铺垫．

本卷的内容既可以作为大学高年级本科生或者研究生数学教育的基础教程，也可以作为大学数学教师教学中的参考材料．

图书在版编目(CIP)数据

集合论导引．第一卷，基本理论/冯琦著．—北京：科学出版社，2019.12
(现代数学基础丛书；178)
ISBN 978-7-03-063621-8

Ⅰ．①集… Ⅱ．①冯… Ⅲ．①集论-高等学校-教材 Ⅳ．①O144

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 272263 号

责任编辑：李静科／责任校对：彭珍珍
责任印制：吴兆东／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2019 年 12 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2020 年 12 月第二次印刷 印张: 20 1/2
字数: 413 000

定价: 138.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于“文化大革命”的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

序　言

宇宙世界浩瀚、丰富、五彩缤纷, 很久以前, 人类就以极大的热情去探索这个包括我们自身在内的客观的宇宙, 以及以不懈的努力去应用已有的探索结果到实践之中来解决包括生存问题在内的一切实际问题, 并将这种探索的结果和求解问题的真实体会尽可能清楚地记录下来. 也正是在这种探索、应用、体会、交流、思考和记录过程中, 人类不断开拓视野, 深化认识, 丰富知识和提升智慧. 在这个人类思想宝库的建设过程中, 曾经有过两个困惑人类智者的哲学问题: 一个是关于如何确保语言表述的正确性以及如何消除语言表达中的二义性的问题; 另外一个是关于无穷这个观念的确切含义的问题.

表面上看起来, 第一个问题是一个系统性的问题, 一个更具一般性的问题; 第二个问题则是一个比较专门的问题, 似乎不可相提并论. 从实际求解过程上看, 也似乎的确如此. 但是, 当读者通读这本《集合论导引》(以下简称《导引》) 之后便能够看透它们之间深刻的内在联系.

早在古希腊时期, 从柏拉图 (Plato) 开始到亚里士多德 (Aristotle), 经历了由 (自然语言下的) 非形式逻辑到 (规范语言表达格式下的) 形式逻辑的演变过程. 在思辨过程中, 柏拉图更愿意将重点放在前提的合理性上, 在他看来只要前提合理, 道理之结论的合理性就应当自然而然依据某种方法得到. 追求这种保持思辨过程中前提和结论之间的合理性关系的一般方法曾经是柏拉图和他的学生们的一个重要任务. 亚里士多德在柏拉图非形式逻辑的基本思想的基础上, 提炼出影响整个西方哲学两千年的形式逻辑体系[1]. 亚里士多德的形式逻辑体系在很大范围内成功地实现了柏拉图的愿望: 先将表达式的内涵搁置起来, 只关注表达形式之间的逻辑关系. 应当说, 将思想表达式的形式与内涵有意识地分离开是一个了不起的进步. 思想的表达方式与思想的内涵所持有的对立性是自然存在的, 是客观存在的; 而清楚意识到这一点, 并且明确地将这种自然对立面分开去寻找确保思维正确性的基本形式规则, 毫无疑问是人类认识论的一大飞跃. 历史的发展也表明这种飞跃是一个里程碑式的起点.

进一步推进第一个问题求解的人当属德国的莱布尼茨 (Gottfried Leibniz). 在莱布尼茨看来, 正像五线谱音符可以表现声音那样, 应当有一种特殊的可以用来表达概念的字符表; 在这个字符表上建立一种语言, 经过符号计算就能确定此语言中

1 Aristotle, The complete works of Aristotle (ed. Jonathan Barnes), Princeton University Press, 1984.

的句子是否为真, 以及这些语句之间具有什么样的逻辑关系. 莱布尼茨希望在有了这样的形式语言和符号计算方法之后, 当人们遇到思辨中争论不清的问题的时候, "让我们来算一算", 答案就在笔头产生, 其正确性必然为大家所接受. 莱布尼茨的一个终生抱负就是要找到一个真实表现人类思想的字符表以及相应的处理这些符号的计算方法, 他也是一个一生将自己奇思妙想和抱负付诸探索行动的人. 将莱布尼茨的梦想实现的人是英国的布尔 (G. Boole). 关于在数学中适当地运用符号所带来的威力, 布尔和莱布尼茨是心灵相通的. 莱布尼茨在少年时代产生了符号计算的奇想; 布尔则是在十六七岁的时候, 在一次穿越田野的漫步之中, 突发灵感：有可能将逻辑关系用代数形式来表示. 在莱布尼茨看来, 恰当地应用符号表达式是一种艺术, 而这样一种艺术是代数的特征和成功的秘诀之一; 布尔则认为代数的威力就在于两点：一是用符号表示数量; 二是那些代数运算只需要遵守几个很少的基本规则. 莱布尼茨企图寻求表达概念的字符表; 布尔则简单地用字母符号来表达任何一个概念, 或者概念之外延. 莱布尼茨坚持形式简洁而准确、表达的结果可以坐下来"算一算"; 布尔则将 "算一算" 的过程通过几条很少的 "代数" 运算规则来实现. 这就是当今我们所熟悉的布尔代数, 这也正是以我们现在几乎人手一部的手机为代表的各种计算机硬件逻辑线路设计以及各种计算机软件程序设计的基础. 布尔将他少年时代的灵感和多年来的思考集中在 1854 年出版的《思维规律》[2] 中, 这本书的雏形曾于 1847 年发表. 在这本书里, 布尔把亚里士多德的古典形式逻辑转换成了布尔代数, 或者布尔逻辑. 布尔显然相信符号代数在人类思维发展进程中所具有的威力, 但布尔未必预测到他对逻辑的代数解释在极大改变人类生活的现代计算机中所具有的不可替代的作用. 这必须归功于对莱布尼茨的 "算一算" 提出数学解释的图灵.

在布尔代数基础上, 或者在形式逻辑基础上, 真正解决 "算一算" 理论模型问题的人是英国的图灵 (Alan Turing). 因为, 在莱布尼茨那里, 什么是 "计算" 依旧是观念的计算, 就如同小学生的加减乘除四则算术观念那样; 在布尔那里, 运算虽然是逻辑代数的, 但这些依旧只是具体的从输入到输出的计算. 真正对 "计算" 这个观念给出圆满解释的是图灵. 图灵 1936 年发表在《伦敦数学会会刊》上的文章[3] 定义了图灵机这一数学模型以及以此为基础的图灵机计算的数学概念. 经过图灵的工作, 观念的计算变成了概念的计算：所有可计算的都是那些图灵机可计算的. 图灵所设计的通用图灵机则是可以以手机为代表的各种计算机内置操作系统

2 George Boole, An Investigation of The Laws of Thought, on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities, Cambridge: Walton and Maberly, London: Macmillan, 1854; New York: Dover Publications, Inc., 1958.

3 Alan Turing, On Computable Numbers with An Application to the Entscheidungsproblem, Proc. London Math. Soc., 1936/1937, 42(1): 230-265.

和编译系统的最高典范.

如果说布尔的逻辑代数中运算还可以建立在潜无穷的观念之上, 那么图灵的通用图灵机则不得不建立在实无穷的概念之上, 这是图灵建立通用图灵机和定义图灵机计算概念的内核基础. 毫无疑问, 图灵是在接受了数学意义上的实在的无穷之后才建立起自己对于计算观念进行系统的数学解释的计算理论的. 那么在图灵之前, 关于无穷到底发生过什么呢?

在古希腊先贤那里, 观念中的无穷只是被简单地分为实无穷和潜无穷两类, 至于什么为实无穷, 什么是潜无穷, 并没有给予过多的关注或者思考. 我们的祖先[4] 也曾留下 “一尺之棰, 日取其半, 万世不竭” 的断言, 但却与幂级数 $1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 无缘. 著名意大利科学家伽利略[5] 在发现自由落体下落的距离与下落时间的平方成正比关系这一物理学定律的时候, 第一个意识到在自然数全体与自然数平方数全体之间存在着一一对应. 但是他令人不无遗憾地认为在无限的情形下谈论多和少是一件不合时宜的事情, 可谓与无穷的数学理论失之交臂. 事实上, 当无理数成为数学研究的对象时, 关于无穷的问题就开始从哲学问题转向数学问题. 如果说有理数都是有穷对象, 无理数在失去了有理数所具有的全部有限特征的情况下就只能是一种无穷对象, 从事数学探索的人们也就必须面对实实在在的无穷对象. 如果说代数数都是某一类有穷对象, 超越数就必须是一种实实在在的无穷对象. 集合论就始于 19 世纪伟大的数学变革过程, 这个过程最为显著的特点是将分析算术化以及由此而来的抽象化和一般化. 随着微积分的出现, 数学家们必须面对诸如序列、函数、级数 (尤其是三角级数)、极限、收敛、发散、连续性、导数、积分等等的问题. 数学家们开始意识到有必要探讨作为数学对象的无穷. 在解决数学分析的诸多问题的过程中, 在为牛顿 (Isaac Newton) 和莱布尼茨创立的微积分中的函数观念提供严格的数学解释的过程中, 起初以解析表达式来解释函数观念的做法逐渐演变为以一般的对应法则来解释函数观念. 这种演变的一个结果就是对于那些用来表示点的实数的整体观念越发明确起来, 尤其是无穷级数观念以及无穷级数的收敛问题更加清楚地呼唤着自然数整体与实数整体的实在性. 也正是在解决三角级数收敛唯一性问题的过程中, 德国数学家康托尔 (G. Cantor) 意识到所需要的整体唯一性与收敛点的全体之间难以分割的紧密关系, 年轻的康托尔由此开始专注地探讨这些收敛点全体以及无穷罗列全体的概念问题. 这种探讨的结果便在康托尔那里产生了对于实数集合

4《庄子 · 天下篇》.

5 Galileo Galilei, Discorces and Mathematical Demonstrations Relating to Two New Sciences, (1638, 原书为意大利语). Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti la meccanica e i movimenti locali (pag.664, of Claudio Pierini) publication Cierre, Simeoni Arti Grafiche, Verona, 2011.

及其子集合探索的基本概念以及超限数的概念. 就在布尔将形式逻辑转换成布尔代数后的 20 年, 也就是 1874 年, 康托尔发表了他将无穷作为数学探讨的对象建立起的关于无穷的数学理论 —— 集合论的第一篇文章[6]. 在这篇文章中, 康托尔证明了只有可数个代数数 (那些以有理数为系数的多项式的实根), 而存在不可数个超越数 (那些包括圆周率 π 以及自然对数基数 e 在内的不是任何以有理数为系数的多项式的实根的实数). 康托尔第一次向数学家们展示出具有实质上更多不可以简单定义的实数. 这是人类关于无穷认识的第一次飞跃. 1883 年, 康托尔发表了《一般集合论基础》[7]. 几年之后, 康托尔将这期间的几篇文章整理成一本专著《超限数理论基础》[8], 这就标志着一个丰富多彩的无穷集合宇宙被展现在世人面前. 整个数学, 也因此即将被放置在一个崭新的基础之上. 现代数学的大门被打开了. 布尔代数, 只能作为集合代数的一种特殊情形, 存在于人类认识的长河之中. 实际上, 从康托尔开始的集合论为人类提供了不仅仅具有丰富内涵的关于无穷的数学理论, 也为人类提供了最精炼的概念语言文字 —— 最初始的不加定义的概念只有一个 —— 集合; 最初始的不加定义的二元关系只有一个 —— 属于. 有关集合的任何复杂的认识都可以系统地在完全确定的基本理论之下归结于初始本原 —— 集合与集合之间的属于关系.

在康托尔的分析中, 将实数整体解释为实数集合; 在实数集合的基础上, 以实数子集合序型, 尤其是秩序的序型, 作为实数子集合的第一抽象, 以实数子集合的势作为第二抽象. 这样抽象的结果便是序数和基数这两个基本概念. 在康托尔的观念中, 无穷集合具有秩序是天经地义的事情, 就像任何有限集合都自然而然地拥有秩序一样. 在康托尔的概念中, 数的概念从有限飞跃到超限, 并且成功地证明了实数的整体比起自然数的整体具有本质上的数量的差别: 自然数的整体可数, 而实数的整体不可数. 在康托尔的理解中, 与自然数集合相对应的基数是第一个无穷基数, 而与整个实数集合相对应的基数则是第一个不可数的基数; 任何一个实数的集合的基数要么是不超过自然数的基数, 要么是第一个不可数基数. 这就是著名的连续统假设. 正是在求解连续统假设的过程中, 康托尔开启了对可定义实数子集合的探索. 比如, 他证明了任何完备实数子集都与整个实数集合等势; 任何实数的闭子集都不会是连续统假设的反例. 正因为他对实数集合具有某种秩序的坚信, 康托尔致力于定义实数集合的一种秩序来解决他的连续统问题. 就这样, 当数的概念从有限领域上升到超限领域时, 康托尔不仅建立了序数和基数的超限算术理论, 还为后来者展

6 Georg Cantor, Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1874, 77: 258-262.

7 Georg Cantor, Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen. Leibzig: Teubner, 1883.

8 Georg Cantor, Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers. New York: Dover Publications, Inc., 1955.

示了两个具有强大驱动力或者牵引力的基本问题：连续统问题以及可秩序化问题. 连续统问题问是否存在势居自然数集合之势与整个实数集合之势之间的实数的子集合？可秩序化问题问实数集合上是否存在一种秩序, 尤其是可定义 (可描述) 的秩序？对这两个问题的求解将是贯穿本书的一条中心线. 这本《导引》的压台定理将为实数集合可秩序化问题提供终结性答案：尽管选择公理保证实数轴可以被秩序化, 但不会有可定义的秩序; 对连续统问题提供最佳答案：连续统假设不会有可定义的反例, 但这不是最终答案. 写这本《导引》的一个基本目的就是期望能有后来者继续对这个问题的终极答案施展自己超群出众的才能.

几乎就在康托尔开始建立集合论的同时, 1879 年, 德国哲学家弗雷格 (Gottlob Frege) 出版了逻辑史上自亚里士多德以来划时代的著作《概念–文字：一种算术式的纯粹思维之形式语言》[9], 这本书为朝着系统地实现莱布尼茨抱负的方向迈出了奠基性的一步; 成功地克服了亚里士多德古典形式逻辑所面临的困难, 这包括满足数学演绎推理的需要和解决多重广延性表述难题; 打开了数理逻辑时代的大门; 同时也提出了一个崭新的问题：数学基础问题.

自 1879 年弗雷格出版《概念–文字：一种算术式的纯粹思维之形式语言》和 1883 年康托尔出版《一般集合论基础》开始, 人们对于数学基础问题探讨的热情高涨起来.

1889 年意大利数学家佩亚诺 (Giuseppe Peano) 出版了《算术原理 —— 用一种新方法展现》[10], 开数学基础研究之先河, 在这本书中, 佩亚诺明确地给出了关于自然数理论的公理, 尤其是关于数学归纳法的公理, 并且严格地将逻辑符号和算术符号区分开来. 这就标志着关于自然数一阶算术特性的形式表述和内涵的最后分离：在自然数性质的讨论过程中依赖于直觉的证明从此被完全抛弃.

弗雷格运用自己的形式语言逻辑系统来探讨二阶算术基础, 1893 年他出版了《算术基本律》[11] 第一卷.

1898 年冬季学期在哥廷根大学执教的希尔伯特 (David Hilbert) 给学生开了一门 “欧几里得几何元素” 的课程. 1899 年, 希尔伯特出版了这门课的讲义：《几何基础》[12]. 希尔伯特在欧几里得几何理论的基础上提出了新的几何公理系统. 希尔伯

9 Gottlob Frege, Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelspache des reinen Denkens, English translation: Begriffsschrift, a formula language, modeled upon that of arithemetic, for pure thought, In: From Frege to Gödel, a Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931, J. van Heijenoort ed. Cambridge: Harvard University Press, 1967, 1-82.

10 Giuseppe Peano, Arithmetices Principia, Nova Methodo Exposita. (The principles of Arithmetic, presented by a new method), Turin, 1889.

11 Gottlob Frege, Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet. (Jena), vol. 1 (1893); reprinted 1962 (Olms, Hildesheim).

12 David Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Leipzig: Teubner, 1899.

特强调这个几何公理体系之中, “点”“线”“面” 完全可以被替换成 “桌子”“椅子”“杯子”, 只要这些对象遵守那些明列出来的公理. 在这里, 希尔伯特提炼出了探讨数学基础的 “公理化方法”: 形式和内涵的分离、对立与统一. 希尔伯特证明了这个新的几何公理系统相对于 (二阶) 算术系统的无矛盾性: 只要 (二阶) 算术系统是无矛盾的, 那么几何便不会有矛盾.

1903 年, 弗雷格完成了《算术基本律》[13] 第二卷. 就在 1903 年第二卷即将付印的时候, 未曾想象的麻烦出现了. 英国哲学家罗素 (Bertrand Russell) 发现由弗雷格第二卷中的第五条 “基本律”—— 概括律, 可以导出一个矛盾 (详情见第一卷《引言》). 也就是说弗雷格的这些 “基本律” 是一个 “矛盾共同体”.

受到佩亚诺算术公理体系和希尔伯特几何公理体系的影响, 既为了解决康托尔连续统假设问题, 也为了应对康托尔集合论所面临的罗素悖论的挑战, 策梅洛 (Enrst Zermelo) 从 1905 年起开始进行集合论公理化的工作. 尽管没有能够证明自己所提出的公理系统是一个无矛盾的系统, 策梅洛在 1908 年正式发表了现在被称为 “策梅洛集合论公理” 的文章《集合论基础探讨》[14]. 显然是为了消除罗素悖论, 策梅洛将弗雷格的 “毫无限制的” 概括律改变成了具有明确限定范围的 “合成规则” 或者 “分解原理”: 策梅洛的集合论公理体系后来进一步得到完善 (详见第一卷《引言》), 从而成为当今集合论的基本理论体系.

正是在康托尔奠定的集合论 —— 这一关于实在无穷集合的基本理论 —— 的基础上, 斯科伦 (Thoralf Skolem) 开始将弗雷格一阶逻辑中对数学结构的语法表现与它们在被表现对象中的语义解释统一起来, 并且试图以集合论来作为数学的基础. 斯科伦在 1920 年发表的文章[15] 中证明了一阶数理逻辑中的三大基本定理之一的罗文海–斯科伦定理. 也正是在这样的基础上, 哥德尔 (Kurt Gödel) 在他 1930 年的博士论文[16] 中证明了具有新里程碑意义的一阶逻辑完备性定理. 这个定理表明被有意识地分离开的表达式的形式与内涵在实在无穷的数学理论上重新归于统一; 关于正确性的形式规则理论非常完备地符合着我们对于客观事物的正确认识. 从而斯科伦的想法变成了数学领域中的现实. 最后, 塔尔斯基 (Alfred Tarski) 成功地

13 Gottlob Frege, Grundgesetze Der Arithmetik, Begriffsschriftlich Abgeleitet. (Pohle, Jena), vol. 2(1903); reprinted 1962 (Olms, Hildesheim).

14 Enrst Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. Math. Ann., 1908, 65: 261-281.

15 Thoralf Skolem, Logico-combinatorial investigations in the satisfiability or provability of mathematical propositions: a simplified proof of a theorem by L. Löwenheim and generalizations of the theorem, In: From Frege to Gödel, a Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931, J. van Heijenoort ed., Cambridge: Harvard University Press, 1967: 252-263.

16 Kurt Gödel, Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Functionenkalküls, Monatshefte für Mathematik und Physik, 1930, 37: 349-360.

奠定了现代模型论[17] 的基础, 他系统地严格地解决了数学理论中表达式何为真何为假的基本问题, 从而作为实在无穷理论的集合论便成为现代数学理论的实实在在的基础.

尽管康托尔关于实数集合是否可秩序化的问题已经由策梅洛提出的选择公理所解决 (详情见第一卷第 2 章), 但是连续统问题依旧还是一个悬而未决的基本问题. 哥德尔于 1938 年以构造内模型的方式[18][19][20] 证明了连续统假设以及选择公理相对于基本集合公理系统 ZF (详情见第一卷第 1 章) 的相对相容性：如果基本集合公理系统 ZF 没有矛盾, 那么这个基本集合论公理系统加上连续统假设以及选择公理也不会有矛盾, 并且在哥德尔的内模型 L 中, 实数集合上有一个具有最佳定义的秩序. 因此, 在哥德尔的 L 中, 康托尔的两个问题 —— 实数集合秩序化问题与连续统问题 —— 都有最好的肯定答案. 哥德尔的内模型 L 将在本《导引》第二卷第 2 章中专门讨论. 大约 25 年后, 科恩 (Paul Cohen) 以力迫构思泛型扩张[21][22][23] 的方式 (详情见本《导引》第二卷第 3 章) 证明了连续统假设之否定与集合论公理系统 ZFC 的相对相容性以及 "实数集合上不存在任何秩序" 这一否定选择公理的命题与集合论基本公理体系 ZF 的相对相容性. 于是, 康托尔的两个问题 —— 实数集合秩序化问题与连续统问题 —— 都与集合论基本公理体系相对独立：ZF 既不能给出肯定的答案, 也不能给出否定的答案.

康托尔在试图求解连续统问题时采取了一条对实数集合**可定义子集**展开系统分析的路线. 这一路线在 20 世纪 30 年代被苏联和波兰数学家们继续采用, 并且形成了**描述集合论**分支. 描述集合论专门研究实数集合的可定义性 (这种可定义性问题也是本《导引》贯穿全书的一个牵引问题). 康托尔曾试图以对可定义的不可数的实数子集寻找一个完备子集的方式来证明可定义子集不会是连续统假设的反例. "要么可数, 要么包含一个完备子集", 这样一种二分原理作为一种实数子集的正则性被称为 "完备子集特性". 实数子集合的另外一个正则性是勒贝格可测性. 勒贝

17 Alfred Tarski, Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych. (The concept of truth in the language of deductive sciences.) Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydzial III (Travaux de la Société des Sciences et des Letters de Varsovie, Classe III) #34 (1933).

18 Kurt Gödel, The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis. Proc. Nati. Acad. Sci. U.S.A., 1938, 24: 556-557.

19 Kurt Gödel, Consistency-proof for the generalized continuum-hypothesis. Proc. Nati. Acad. Sci. U.S.A., 1939, 25: 220-224.

20 Kurt Gödel, The consistency of the continuum hypothesis. Ann. of Math. Studies, No. 3, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1940.

21 Paul Cohen, The independence of the continuum hypothesis. I. Proc. Nati. Acad Sci. U.S.A., 1963, 50: 1143-1148.

22 Paul Cohen, The independence of the continuum hypothesis. II. Proc. Nati. Acad Sci. U.S.A., 1964, 51: 105-110.

23 —, Set Theory and the Continuum Hypothesis, New York: Benjamin, 1966.

格 (Henri Lebesgue)1902 年在他的学位论文[24]中引进了勒贝格测度, 从而实数子集的可测性便被视为一种正则性. 实数子集合的第三种古典正则性则是贝尔 (René Baire) 早在 1899 年[25] 所引进的**贝尔特性**: 一个实数子集合具有贝尔特性指的是它与某个开子集的对称差是一个稀疏集合 (详情见第一卷第 3 章). 出于对实数子集的可定义性的探索, 博雷尔 (Emile F. Borel) 以代数的方式[26] 引进了实数轴上包含全体开子集、对于集合取补运算封闭、对于可数并以及可数交封闭的最小代数, 其中的元素便被称为**博雷尔集合**. 博雷尔集合就具有完备子集特性, 都是勒贝格可测的; 也都具有贝尔特性. 勒贝格于 1905 年发表的文章[27] 对博雷尔集合进行了严格分层, 用康托尔的对角线方法证明了这种分层是真实分层, 并且存在不是博雷尔集合的但是可定义的实数子集合. 令描述集合论真正得到激励的是苏斯林 (Mikhail Suslin) 发现了[28] 勒贝格证明中存在一个看走眼的地方. 透过对勒贝格看走眼的地方的详细分析, 苏斯林引进了**解析集**的概念, 并且证明了一个实数集合是一个博雷尔集合的充分必要条件是: 不仅它是一个解析集合并且它的补集也是一个解析集合 (详细内容见第一卷第 3 章). 在苏斯林发现的基础上, 卢津 (Nikolai Luzin)[29] 和谢尔品斯基 (Wacław Sierpiński)[30] 建立起实数子集的**投影集层次**, 并且以**树**来表示实数子集, 这也为有秩关系进入数学实践开启了先河. 经过他们的工作, 我们知道每一个解析集都具有完备子集特性 (Suslin), 从而不会是连续统假设的反例; 都是勒贝格可测的 (Luzin); 都具有贝尔特性 (Luzin-Sierpiński). 后面我们会看到, 苏联和波兰描述集合论古典学派在对实数子集正则性分析中, 在 ZFC 基础上, 已经达到思维成就的顶峰, 这从哥德尔可构造论域 L 中关于实数集合上的可定义秩序就可以看出. 当然, 这些都是后话. 之所以如此, 就在于 ZF 或者 ZFC 所能提供的资源能够被利用的全都被利用了. 因此, 要想将对实数正则性的分析推向更高层次的投影集合上去, 就必须增加集合论论域的资源.

依旧对增加集合论论域的资源留有空间的是无穷公理. 在基本集合论公理系统中, 无穷公理本质上只是断言自然数集合存在. 因此, 在此基础上不断引进更强

24 Henri Lebesgue, Intégrale, Longuer, Aire, Paris: Thèse, 1902.

25 René Baire, Sur les fonctions de variables réelles. Annali di Math, 1899, 3(3): 1-123.

26 Emile F. Borel, Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en series de polynomes. Paris: Gauthier-Villars, 1905.

27 Henri Lebesgue, Sur les fonctions représentables analytiquement. J. de. Math., 1905, 1(6): 139-216.

28 Mikhail Suslin, Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis. C.R. Acad. Sci. Paris, 1917, 164: 88-91.

29 Nikolai Luzin, Sur les ensembles projectifs de M. Henri Lebesgue. C. R. Acad. Sci. Paris, 1925, 180: 1572-1574; Remarques sur les ensembles projectifs. C. R. Acad. Sci. Paris, 1927, 185: 835-837.

30 Wacław Sierpiński, Sur une classe d'ensembles. Fund. Math., 1925, 7: 237-243; Sur quelques propriétés des ensembles projectifs. C. R. Acad. Sci. Paris, 185(1927), 833-835.

的无穷公理便成为一种有效的追求.

基于与彻底有限集合的论域 (见第一卷第 1 章) 的**相似性**, 谢尔品斯基和塔尔斯基[31] 以及策梅洛[32]引进了 (强)**不可达基数**存在的公理. 借助于第一个不可数基数在哥德尔论域 L 中的不可达特性, 数学家们终于意识到解析集的补集是否具备完备集特性是一个地地道道的大基数是否存在的问题 (所有这些都会在第三卷第 3 章中展开讨论, 这里就简要地介绍一下).

基于实数集合上的勒贝格测度以及不可测实数集合的存在性这样的事实, 以及对一般测度问题的完美解答的追求, 乌拉姆 (Stainsław Ulam) 引进了[33] **可测基数**存在的公理. 事实上, 可测基数的概念仍然可以看成自然数集合之基数概念的相似推广. 每一个可测基数都是不可达基数, 并且在一个可测基数之下存在许许多多不可达基数, 可测基数的存在的确为数学家提供了丰富的新资源 (详情见第三卷第 3 章). 恰恰由于它所提供的丰富资源, 可测基数的存在表明集合论论域在本质上完全不同于哥德尔可构造论域 L. 第一个指明这种实质差别的是斯卡特 (Dana S. Scott)[34].

基于第一个无穷基数的组合特性, 艾尔铎希 (Paul Erdös) 和塔尔斯基[35] 引进了**弱紧基数**(见第一卷第 2 章).

基于第一个无穷基数的紧致性, 凯斯乐 (H. Jerome Keisler) 和塔尔斯基[36]引进了**强紧基数**(见第三卷第 1 章). 不仅如此, 在这篇文章中, 两位作者利用可测基数上的可数完全超滤子, 构造了集合论论域的超幂, 以证明最小的可测基数严格大于最小的不可达基数. 斯卡特也正是应用这种超积方法 (由可测基数上的正规超滤子所确定的超幂) 证明了如果存在一个可测基数, 那么集合论论域一定不同于哥德尔可构造论域 L.

因为存在着从集合论论域到由可测基数上的正规超滤子所确定的集合论论域的超幂的典型同质嵌入映射, 所以人们很快将关注大基数的眼光转移到了具有不同

31 Wacław Sierpiński and Alfred Tarski, Sur une propriété caractéristique des nombres inaccessibles. Fund. Math., 1930, 15: 292-300.

32 Ernst Zemelo, Über Grenzzahlen und Mengenbereiche: Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. Fund. Math., 1930, 16: 29-47.

33 Stainsław Ulam, Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre. Fund. Math., 1930, 16: 140-150.

34 Dana S. Scott, Measurable cardinals and constructible sets. Bull. Acad. Polon.Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., 1961, 9: 521-524.

35 Paul Erdös and Alfred Tarski, On some problems involving inaccessible cardinals. In: Essays on the Fuondations of Mathematics (Y. Bar-Hillel et al., eds.), Magnes Press, Hebrew University, Jerusalem, 1961: 50-82.

36 H. Jerome Keisler and Alfred Tarski, From accessible to inaccessible cardinals. Fund Math., 1964, 53: 225-308.

特点的同质嵌入映射之上. 正是基于对嵌入映射的目标模型所持有的封闭特点的考量, 索洛维 (Robert M. Solovay) 等[37] 引进了**超紧基数**, 这一切都显得十分自然. 超紧基数的存在为解决诸多集合论中悬而未决的问题带来了前所未有的突破. 在本《导引》的第三卷中我们将会看到不少这样的典型例子. 在第三卷第 3 章中我们会看到超紧基数对于完全解决康托尔关于实数集可定义秩序问题以及其他关于实数集合正则性问题的优美解答.

大基数作为无穷公理的自然加强或者推广, 为集合论论域增添了极其丰富的资源, 有许多已经被开发和利用, 更多的还被隐藏着, 等待智慧的发现、开发和利用, 以期对于无穷的认识会不断得到升华.

这本《导引》的基本宗旨就是向读者解释以康托尔集合论为基础的现代集合论的基本内涵以及这样的有关无穷的集合理论何以具备先贤们所期望的那些功能. 这本《导引》分为三卷, 每卷三章. 下面我们简要地介绍一下各卷各章的主要内容, 更为详细的引言将分布在各卷之首.

第一卷是基础理论部分. 在这里我们将奠定整个集合论的基础, 在引进集合论的基本公理系统的基础上, 引进集合论中通用的基本概念, 引进具体的具有典范意义的无穷集合, 并展开一些具体的组合分析. 第 1 章的主要内容是引进可数集合的最基本的例子：自然数集合、整数集合、有理数集合以及彻底有限集合; 中心则是解释递归定义、归纳法以及传递化这些集合论分析中最基本的最常用的方法. 第 2 章的基本内容是组合分析, 主要有选择公理、基数运算以及一些基本组合原理. 第 3 章是实数集合. 除了证明一系列重要的基本定理之外, 第一卷的一个重要任务是为后面的理论发展提出具有引导意义的基本问题, 这包括连续统问题、奇异基数假设、实数子集的正则性问题, 对这些问题的求解将是贯穿这本《导引》的中轴线.

第二卷是集合论的模型分析部分. 这一卷的主要任务是将逻辑植入到集合论之中, 并以此为基础实现三大目标：第一大目标是将同质子模型分析引入集合论, 这是一种不同于组合分析的对无穷集合展开分析的基本方法. 如果说组合分析具有纯粹局部特点, 那么同质子模型方法则具有很强的总体特点. 从逻辑的角度看, 组合分析是在论域内部展开的某些特定的性质的讨论, 而同质子模型分析则是利用围绕事物在相对论域中的外部特性与内部特性的比较来展开的讨论, 这也正是集合论在解决许多问题上具有强大功能的关键所在. 第二大目标则是建立集合论论域的具有典范作用的内模型, 这是哥德尔为解决连续统假设的合理性而开创的一个研究领域. 所谓内模型, 就是在集合论的论域之内寻求既包括所关注的对象又对于各种集合运算封闭的最小的传递类, 从而得到所关注对象的某种特性的合理性证明. 第三大目标是建立集合论论域的具有典范意义的外模型, 这是科恩为解决连续统

37 Robert M. Solovay, William N. Reinhardt, Akihiro Kanamori, Strong axioms of infinity and elementary embeddings, Ann. Math. Logic, 1978, 13: 73-116.

假设的独立性而开创的一个研究领域. 所谓外模型, 就是在集合论论域之内定义一个具有特别组合特点的偏序集合, 并以此为基础, 系统地将集合论的论域向外扩张, 得到一个扩张模型, 从而得到所关注对象的某种特性的合理性证明. 由于集合论本身的一种基本特点：不依赖任何外部因素, 完全独立地发展自身体系. 这种向外扩张必须以内部完全可控的方式来实现, 这便是科恩所创立的力迫论. 这三大目标的基本实现也就分别构成了第二卷三章的内容.

第三卷是对集合论保证无穷集合存在的无穷公理的层次分析. 这种分析既包含组合分析, 也包含逻辑分析; 既包含内模型分析, 也包含外模型分析; 归根结底是揭示各种高阶无穷公理对于整个集合论论域的影响, 尤其是对实数集合的影响. 因此, 第三卷的第 1 章侧重于大基数的组合分析、逻辑分析以及内模型构造; 第 2 章侧重于在大基数上构造各种各样的具有典范意义的力迫扩张, 从而解决包括奇异基数假设在内的一些长期遗留问题的独立性问题; 第 3 章侧重于分析高阶无穷对实数子集合正则性的影响. 如果说不同的无穷公理从不同层次上在集合论论域中提供了不同丰富程度的资源, 那么剩下的便是在集合论论域中探索的人们如何将自己的高端智慧发挥到极致来发现、挖掘和利用这些丰富资源的事情. 就如同一部庞大的歌剧必定有全剧高潮那样, 这本《导引》的最后一章也就是截止于 1990 年左右的集合论这一人类智慧结晶的最优美的展现.

这本《导引》涵盖从 1874 年起将近 145 年的集合论发展主线上的具有引领作用的内容. 本书通篇将以问题为牵引, 以概念为基础, 以例子为蓝本, 来展开分析, 力求清楚地展现核心思想和方法及其作用的精髓, 努力实现逐步铺垫、循序渐进、化解难度. 在作者心中, 集合论既是纯粹的数学, 也是精美的哲学, 就如同五线谱与音乐, 它以完全抽象展现具体, 又以十分具体实现纯粹抽象. 本书力图为读者展现一幅高端智慧探索无穷的完美图画. 为此, 本书将力图清晰地勾勒集合论的内在思想结构, 包括自然性和典型演绎发展路径. 作者的悟性有限, 集合论宇宙风光无限, 作者也因此期待具有更高悟性的读者能够将作者在本书中展现的粗糙和短缺完善, 使其更加精致和完美, 这便是 “导引” 一词的本来含义. 课题的选择往往是困难的, 许多更是难以取舍, 但是受篇幅限制, 就不得不忍痛割爱. 最大的缺憾自然是没有能够将内模型的精细分析理论、可测基数之下的内核模型、武丁基数之下的内核模型以及武丁的 $\mathbb{P}_{\max}$- 模型等内容放到这本《导引》之中. 这是无可奈何的事情, 因为这些优美的内容足以各自另成一本厚厚的专门著作. 同样由于篇幅所限, 我们常常不去关注一些定理的最佳形式, 除非它们的最佳形式无论是表述还是证明都不会增加额外的复杂性. 正如我们不得不舍弃几大专题那样, 我们也忽略了许多优美的大基数概念和定理, 因为《导引》毕竟不会是 “百科全书”. 对于希望了解更为综合性集合论内容的读者, 我们推荐耶赫 (Thomas Jech) 的《集合论》(2003 年版本), 这也是这本《导引》通篇所用的主要参考书.

作者曾以这本书的第一卷中的大部分内容为教材分别在新加坡国立大学、清华大学和中国科学院大学为高年级本科生讲授集合论课程; 也曾以第二卷和第三卷的前两章中的主要内容为教材在新加坡国立大学和中国科学院数学与系统科学研究院给集合论专业的研究生讲授集合论课程. 因此, 作者真诚希望这本《导引》能够启发和引导未来的能够被集合论所吸引的读者进入这个浩瀚的领域.

本书三卷全部由中国科学院数学与系统科学研究院资助出版, 谨此深表谢意. 作者也借此机会表达对科学出版社, 尤其是李静科编辑的真诚谢意.

冯　琦

中国科学院数学与系统科学研究院

2019 年 4 月 30 日

目　　录

引　　言

集合论自从康托尔开始就面临两个基本问题：一个是在实数集合上是否存在一个秩序？如果存在，该如何在实数集合上定义一个秩序？另外一个就是连续统假设是否成立？除了这两个基本问题之外，还有一个更为基本的问题：为了建立合适的关于无穷集合的数学理论，无穷的基本数学内涵如何确定？无穷集合应当以什么样的合适的方式获取既不至于资源贫乏又不至于导致矛盾？换句话说，严格的集合理论应当以一种什么样的方式来奠基以至于它的发展会健康而且没有止境？

任何复杂的系统总是从最基本最简单的部件开始的，集合论也一样.

首先，集合论必须以一种不会导致争议的方式确定"集合"这个基本名词内涵解释的范围. 提醒在这里谨慎行事的是英国哲学家罗素 (Bertrand Russell) 1902 年 6 月 16 日写给德国哲学家弗雷格的一封信[1]. 在这封信中，罗素就弗雷格毫无限制地使用"谓词"表达了质疑，这便是史上所称的**罗素悖论**：

> *考虑由所有那些自己不是自己的一个元素的集合所合成的实体，姑且记成 M，那么，这一实体 M 就不能是一个集合.*

我们假定这样一个实体是一个集合，即 M 是一个集合. 那么，我们就可以问: M 是否是它自身的一个元素？答案只有两个，或者是，或者不是. 如果 M 是其自身的一个元素，那么，由其合成规定，它的任何一个元素一定是一个自己不是自身的一个元素的集合，这是一个矛盾. 如果 M 不是它自身的一个元素，那么，由 M 的合成规定，作为一个集合，M 又不是它自身的一个元素，M 就应当被收录到 M 中来，所以，M 就应当是它自身的一个元素，这又是一个矛盾. 我们由此得出一个结论: 并非任意地将一些对象收集起来就应当合成一个集合.

其次，集合论里，乃至整个数学里，函数这个概念是最基本的一个概念. 在数学发展史上，有过很长一段这样的时间区间：在这个期间，数学家们对函数概念应当在什么范围内使用感到困惑. 尤其是，当德国数学家策梅洛 (Enrst Zermelo) 在非常一般的环境下显式地应用函数这一概念表述他所提出的**选择公理**[2]，并且应用选择公理证明了也是他提出的**秩序原理**(任何集合都携带一个秩序，从而在选择公理下

---

1 Bertrand Russell, Letter to Frege, 1902, In "From Frege to Gödel", a source book in mathematical logic, 1879-1931, Jean van Heijenoort ed., Harvard University Press, 1967: 124-125.

2 Enrst Zermelo, Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann. Math. Ann., 1904, 59: 514-516.

给出实数集合是否可以秩序化问题的肯定解答) 之后, 不少数学家感到某种不安.

为了解决罗素悖论所指明的问题, 以及解决函数的抽象定义问题, 策梅洛开始了公理化集合论的探索. 基于对自己秩序原理证明的重新审视, 策梅洛选取了基本的由已有集合获得新集合的运算：由两个给定集合得到一个以它们也只以它们为元素的新集合; 由一个给定集合得到一个以它的元素的元素为元素的新集合; 以一种特性将一个给定集合中所有具有这种特性的元素分离出来组成一个新的集合; 对于一个给定的集合, 可以将它的全部子集合收集起来得到一个新集合; 在这些集合运算的基础上, 策梅洛还提炼出集合相等的同一律、无穷集合公理和选择公理. 策梅洛将这些简洁和开放的公理系统发表在 1908 年的《数学年鉴》上[3]. 这便是当今通用的集合论公理系统 ZFC 中的 Z 和 C. Z 是用来纪念这位深刻的思想者, 因为他的姓的第一个字母为 Z; C 则是选择公理中的选择一词的英文第一个字母.

策梅洛并没有在他的公理系统中定义 "点", 或者 "有序对". 如果希望将集合论中的函数概念也当成内在的概念, 一个以集合来确定的有序对就必不可少. 基于对策梅洛证明的仔细分析, 库拉托夫斯基 (Kazimierz Kuratowski) 提供了有序对的定义 [4]. 于是, 无论是函数, 还是二元关系, 也就都成为集合论论域中的对象.

由于策梅洛在表述以一种特性从一个给定集合中分离部分从而获得一个新的子集合时, 他并没有对性质有任何规定, 也就是说, 在这里存在着潜在的二义性. 为了避免这种潜在二义性, 斯科伦提出了[5] 用一阶逻辑语言的方式来限定特性的表述. 就这样, 策梅洛所提炼出来的集合论公理系统与弗雷格在《概念–文字》中提炼出来的一阶逻辑系统发生了融合.

很快人们意识到就算在执行最简单的策梅洛的幂集运算迭代过程中也会遇到策梅洛的公理系统不能保证其收敛性的问题. 弗伦克尔 (Abraham Fraenkel) 提出[6]为策梅洛集合论公理系统 ZC 添加一条新的公理模式：**映像存在原理**. 于是, 现代集合论公理系统 ZFC 中便用给 ZC 添加一个字母 F 来纪念他.

虽然康托尔强调秩序以及秩序的序型 —— 序数, 甚至建立了序数的算术运算, 但是在冯 • 诺伊曼 (John von Neumann) 之前并没有关于序数的合适的定义. 毫无

3 Enrst Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. Math. Ann., 1908, 65: 261-281.

4 Kazimierz Kuratowski, Sur la notion de l'order dans la théorie des ensembles, Fund. Math., 1921, 2: 162-171.

5 Thoralf Skolem, Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre//Mathematikerkongressen Helsingfors den 4-7 Jui 1922, Den femte skandinaviska matematikerkongressen, Redogörelse, Helsinki, Akademiska-Bokhandeln, 1923: 217-232.

6 Abraham Fraenkel, Über die Zermelosche Begründung der Mengenlehre. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1921, 30II: 87-98.

疑问, 冯 • 诺伊曼在 1925 年发表的文章中对序数的定义[7]是美妙绝伦、精湛极致的, 在冯 • 诺伊曼那里, 序数就应当在属于关系 $\in$ 之下既是传递的又是有秩序的. 如此一来, 每一个序数就是所有那些比它严格 “小” 的序数的集合. 这也就同时给出了自然数的集合定义：任何一个自然数就是所有那些严格小于它的自然数的集合.

在经过二十来年的公理化进程之后, 康托尔的朴素集合论演变成了严格的几乎完美的数学理论.

新的理论产生了. 它是如此简洁, 它又是如此丰富. 同时, 它也面临着经典的问题：它能够解决连续统假设问题吗? 不仅如此, 它还面临着更为严峻的挑战：它是自身和谐的吗? 也就是问, 它是否蕴涵着自相矛盾?

关于是否自相矛盾的问题, 根据哥德尔 1931 年发表的题为《关于〈数学原理〉及相关系统中不可形式判定的几个命题 I》的论文[8], 这是对于功能如此强大的集合论来说依然不可能自身解决的问题：因为它不能在自己的系统之中来证明自己的无矛盾性, 除非它本来就自相矛盾.

在这一卷里, 我们将系统地建立集合论公理体系 ZFC, 并以此为基础建立集合论乃至数学中所用到的基本概念和基本理论. 本卷分为三章.

第 1 章是纯基础的关于传递集合以及传递集合的子集合的理论. 这里我们将在引进集合论基本存在性以及基本运算的基础上逐步引进有序对的定义、函数的定义、序数的定义、秩序的定义、势与基数的定义; 以势的概念为基础, 我们将区分有限与无限、可数与不可数, 并将证明康托尔第一定理; 我们也将明确集合论通用的最基本的超限归纳法、超限递归定义以及有秩关系传递化; 我们将应用超限递归定义引进集合论论域的累积层次; 我们还将严格建立自然数、整数以及有理数的基本算术理论以及彻底有限集合的概念.

第 2 章是关于选择公理以及在选择公理基础上得以发展的不可数基数理论以及组合理论. 如果说第 1 章更多的是围绕可数无穷集合的范例来展开的话, 那么第 2 章则是围绕不可数集合来展开的讨论. 我们会在选择公理的基础上证明秩序原理, 以及与选择公理对等的常用命题. 在选择公理基础上, 我们定义无穷乘积以及证明最基本的基数算术等式以及基数不等式, 包括最基本的也是最佳的柯尼希 (Julius König) 不等式[9]; 我们会涉及无穷集合上的最典型的集合代数结构：滤子、超滤子和理想、素理想; 我们会应用不可数正则基数上的典型滤子来分析奇异基数假设问题, 包括 Silver 定理和 Galvin-Hajnal 定理; 我们会涉及后面也会经常用到的比较

---

7 John von Neumann, Eine Axiomatisierung der Mengenlehre. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 1925, 154: 219-240.

8 Kurt Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. Monatshefte für Mathematik und Physik, 1931, 38: 173-198.

9 Julius König, Zum Kontinuum-problem. Math. Ann., 1905, 60: 177-180.

典型的偏序结构：树结构; 苏斯林问题[10] 和苏斯林树以及马丁公理[11] 也将在这里引入; 苏斯林问题也将是牵引集合论发展的独立性问题的典型例子. 我们还会讨论组合论中特有的拉姆齐 (Frank P. Ramsey) 划分定理[12]以及探讨可能的推广问题. 不可达基数和弱紧基数将在这里引入.

第 3 章是关于实数集合的理论和问题. 我们会从数学中最基本的实数结构的定义开始, 以戴德金 (J. W. Richard Dedekind) 分割[13]来定义实数. 这里, 我们会展开对连续统假设的可定义性反例问题展开分析, 同时引入贯穿全书的实数集合的正则性问题; 这包括证明康托尔有理数轴唯一性定理、闭集完备集特性定理、闭集树表示定理; 包括引进博雷尔集和解析集以及对它们的正则性分析, 从而展示古典描述集合论在解决这些古典问题时所完成的成功之作, 包括苏斯林定理以及投影集层次定理. 我们将在这里引进无穷博弈以及胜负确定性问题, 可定义实数子集的胜负确定性问题是一个具有深刻高阶无穷内涵的问题, 也是牵引描述集合论发展的核心问题. 这个问题的最终解答将是本书最后一章的主要内容. 这里, 我们也将作为例子引进非标准自然数结构以及非标准实数结构. 这既有哲学的含义也为未来复杂的构造做了一点铺垫：因为这是今后要遇到的超幂构造和迭代超幂构造中最简单的例子.

10 Mikhail Y. Suslin, Problème 3. Fund. Math., 1920, 1: 223.

11 Donald A. Martin and Robert M. Solovay, Internal Cohen extensions. Ann. Math. Logic, 1970, 2: 143-178.

12 Frank P. Ramsey, On a problem of formal logic. Proc. London Math. Soc., 1930, 30: 264-286.

13 J. W. Richard Dedekind, Stetigkeit und Irrationale Zahlen. Braunschweig, 1872.

第 1 章　传 递 集 合

1.1　集合论语言及形式理论

集合论是一种关于无穷的纯粹数学理论, 是一种关于无穷的认识的理论体系. 集合论可以大概地分成两部分: 第一部分是集合论关于其基本对象 —— 集合的 "算术" 的、"几何" 的、"组合" 的理论, 在这一部分, 我们要回答的主要问题形如到底都有什么样的无穷集合存在, 它们之间的关系如何, 因此, 第一部分是我们关于无穷的最基本的认识的结晶; 第二部分是集合论的一种 "自我检测" "自我判断" 的理论, 在这一部分, 我们要回答的主要问题就是到目前为止我们关于无穷的认识到底达到了一种什么样的完美的程度, 我们的认识可以达到什么样的完美的程度. 集合论的第一部分是集合论的一阶理论; 集合论的第二部分则是集合论的二阶甚至高阶理论, 具有元数学理论的成分. 第一部分探讨我们的论域之中都有什么样的对象存在; 第二部分探讨我们用来保证这些对象存在的假设是否合理, 是否多余, 是否完备, 也就是是否构成一种完美的理论. 这种区分其实只是在刚开始的时候才有必要, 后面, 尤其是到本书的第三卷中, 我们将看到集合论自身有着极大的兼容特点, 尤其是当高阶无穷存在的时候.

我们先解释一下上面用到的几个术语的基本含义. 一个论域, 就是我们所关注的某一类数学对象的一个界定范围. 比如, 有理数的全体构成域论的一个论域; 实数的全体又构成域论的另外一个论域; 而复数的全体则构成域论的一个新的论域. 在域论中, 我们所关注的对象就是域中的 "数", 尽管一个具体的例子可以是一个有限域, 这些论域中的对象就是我们所说的 "一阶对象", 所以, 域中的 "数" 就是域论的一阶对象. 那么, 域论中的二阶对象又是什么样的呢? 比如, 子域、域同构、多项式等等, 都是域论中的二阶对象.

集合论的一阶理论所关注的对象就是集合, 就像数论中的 "数" 那样. 集合论的一阶理论还关注集合之间是否具有 "隶属" 关系, 就像有序域论中的 "序" 那样. 所以, 集合和集合之间的属于关系就是集合论一阶理论所关注的两类对象.

通常, 我们很快就会问一个直觉问题: 什么是集合? 一个直觉的回答: 一个集合就是将一些对象收集起来所合成的一个实体. 这些被收集起来的对象就是这个被合成的实体的元素或者成员. 一个用心的读者很快会发现, 关于集合这一概念的问题我们往往不会到此打住, 除非我们愿意在某一时刻停下来, 否则将永无终结. 我们可以追求用别的初始概念来定义集合这一概念, 但必须有一个不加定义的但可以不

引起混淆的初始概念. 为了消除这样烦恼, 我们采用弗雷格方式：用变元来表示集合论论域中的集合. 这也正是通常的数学实践中处处可见的事情. 比如, 大家不难回顾到: 在学习或研究数论或域论时, 我们并没有关心过什么是 “数”; 在学习或研究几何时, 我们也并没有关心过什么是 “点”. 我们通常所做的不过如此: 设 n 为一个自然数, $\cdots\cdots$; 设 x 为域中的一个元素, $\cdots\cdots$; 设 p 为平面或空间上的一个点, $\cdots\cdots$ 如此等等.

面对诸如 “集合” 以及 “属于” 这样的初始概念 (不加定义的概念), 我们不求给出数学定义, 但求给出一系列条件来区分和限制我们所关注的对象, 这就是公理化: 不求初始定义, 但求明确, 但求准确, 但求用一系列的公理来有限度地表达我们对初始概念的 “理解” 或 “期望”.

1.1.1 集合论语言

首先, 我们将用字母作为变量、变元、变数 (variables) 来表示所关注的论域中的对象: 集合. 这里要强调的是, 我们不定义集合, 也不回答什么是集合的问题; 而是将集合作为我们论域中的对象, 作为一个不加定义的初始概念.

其次, 就整个论域宏观而言, 我们有一个抽象的隶属关系, 并且用一个特殊的记号 “$\in$” 来表示这一抽象关系. 假设 x 和 y 是两个集合, 我们用 $x \in y$ 来表示 “x **属于** y”, 或者 “x 是 y 的一个元素”; 有时, 我们也用 $y \ni x$ 来表示 $x \in y$, 并且称 “y **包括** x”; 而用 $x \notin y$ 来表示 “x **不属于** y”, 或者 “x 不是 y 中的一个元素”; 当需要时, 用 $y \not\ni x$ 来表示 “y **不包括** x”. 这里的 x, y 可以是任何其他的表示集合的变量.

最后, 关于等号, 记成 $=$, 我们将坚守如下**等号三律**:

(1)(*自反律*) 对于所论变量 x, 总有 $x = x$;

(2)(*对称律*) 对于所论变量 x, y, 如果 $x = y$, 那么, $y = x$;

(3)(*传递律*) 对于所论变量 x, y, z, 如果 $x = y$ 和 $y = z$, 那么, $x = z$.

在这里, “所论变量” 就解释为集合. 那么, 我们将如何判断给定的两个集合是否相等呢? 这便是下面的同一律的内容.

同一律 两个集合 x 和 y 相等同的充分必要条件是它们具有完全相同的元素 (成员).

集合之同一律表明：任何一个集合都由它的 “**外延**” 唯一确定.

同一律讲判断两个集合是否等同的条件就在于它们是否具有一样的**外延**. 换句话讲, 一个集合完全由它的外延所决定. 这是判断集合等同的唯一准则.

前面, 我们已经看到自然语言在用来陈述数学命题时, 常常有把握不准确的现象发生, 也就是带有一定的二义性. 这是任何一种自然语言不可避免的. 为了表述得更准确, 有必要引入集合论自己的数学语言, 就像域论有自己的数学语言那样.

集合论语言其实很简单: 一些用来表示集合的**变量**(**变元**), 我们用各种各样的字母或者带上下标的字母来记这些变量; 一个表示集合之间**属于关系**的**二元关系符号** $\in$. 这些就是我们集合论**表达式**中最基本的构成符号. 在构成集合论表达式时, 我们用到一阶逻辑所提供的五个逻辑联结词和两个量词. 为了可读, 我们有时也使用括弧 "(" 和 ")", 下面给出这些联结词和量词.

$\neg$, 用来表示 "否定", 被称为 "否定词". 在一个表达式之前加上 $\neg$ 就得到这一表达式的**否命题**.

$\wedge$, 用来表示 "与" "且", 被称为 "合取词". 在两个表达式中间加上 $\wedge$ 就得到这两个表达式的**与命题**.

$\vee$, 用来表示 "或", 被称为 "析取词". 在两个表达式中间加上 $\vee$ 就得到这两个表达式的**或命题**.

$\rightarrow$, 用来表示 "蕴涵", 被称为 "蕴涵词". 在两个表达式中间加上 $\rightarrow$ 就得到一个**蕴涵命题**: $\rightarrow$ 的左边的表达式蕴涵它右边的表达式. 其左为**条件**, 其右为**结论**.

$\leftrightarrow$, 用来表示 "对等" "等价", 被称为 "对等词". 在两个表达式中间加上 $\leftrightarrow$ 就得到一个**对等命题**: 其左右两边的表达式相互蕴涵.

$\forall$, 用来表示 "所有的", 被称为 "全称量词". 在一个表达式之左加上一个全称量词并紧随着一个变量, 就得到一个**全称表达式**, 它断言 "论域中所有的对象都具有原来表达式所断定的特性".

$\exists$, 用来表示 "存在一个", 被称为 "存在量词". 在一个表达式之左加上一个存在量词并紧随着一个变量, 就得到一个**存在表达式**, 它断言 "论域中存在一个具有原来表达式所断定的特性的对象".

上述这些就组成集合论数学语言的基本符号. 重要的是用这些符号怎样构成集合论数学语言的表达式. 为此, 我们引进如下定义.

定义 1.1　(1) 集合论的**基本表达式**是那些形如 "$(u \in v)$" 的符号串.

(2) 集合论的**表达式**由如下五条规则递归地给出:

(a) 每一个基本表达式都是一个表达式 (比如, $(x \in y)$);

(b) 如果 ϕ 是一个表达式, 那么, $(\neg\phi)$ 是一个表达式 (比如, $(\neg(x \in y))$, 也记成 $(x \notin y)$);

(c) 如果 ϕ_1 和 ϕ_2 都是表达式, 那么

$$(\phi_1 \wedge \phi_2),\ (\phi_1 \vee \phi_2),\ (\phi_1 \rightarrow \phi_2),\ (\phi_1 \leftrightarrow \phi_2)$$

都是表达式 (比如,

$$((x \notin y) \wedge (u \in v)),\ ((x \in y) \vee (u \notin v))$$

$$((x \notin y) \wedge (x \in u)) \rightarrow ((x \notin v) \vee (y \in v)),\ ((x \in y) \leftrightarrow (y \in x))).$$

(d) 如果 ϕ 是一表达式, 则 $(\forall x\, \phi)$ 和 $(\exists y\, \phi)$ 都是表达式 (注意, 这里涉及的变量 x 或 y 可以用任何一个别的变量所取代), 比如,

$$(\forall x\,(u \in y)),\ (\exists u\,((u \in x) \wedge (u \notin y))),\ (\exists x\,(x \notin x)).$$

(e) 任何一个表达式都只能从上述四种之一得到.

每一个表达式都是一个断言、一个命题、一种性质或者某种性质的一个表述. 反之, 亦然.

例 1.1 下面的表达式中的第一个 $\leftrightarrow$ 的右端是集合论语言的一个表达式, 但是左端的等式中的等号并不是集合论语言的一个符号:

$$(x = y) \leftrightarrow (\forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y)),$$

为了使用等号, 将符号 $=$ 纳入我们的集合论语言, 我们用下述同一律来定义等号 $=$:

$$\forall x\, \forall y\ ((x = y) \leftrightarrow (\forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y))).$$

将这个**同一律**作为我们的第一条公理, 也就是断言两个集合相等中的等号 $=$ 的**定义公理**. 在同一律基础上, 我们将集合论的语言扩充到包括新添的等号 $=$, 并且在同一律的基础上, 我们将 $=$ 和 $\in$ 一起看成是集合论语言的两个基本符号. 于是, 下述整个是一个表达式, 处于第二列的对等词的两端的也都是表达式:

$$\begin{aligned}(x \neq y) &\leftrightarrow (\neg(x = y)) \\ &\leftrightarrow (\neg(\forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y))) \\ &\leftrightarrow (\exists z\,((z \in x\ \wedge\ z \notin y)\ \vee\ (z \notin x\ \wedge\ z \in y))).\end{aligned}$$

我们希望引起读者对上述对等式中的最下面两行的关注：因为这里涉及对带量词的表达式取否定, 以及对于含对等符号的表达式取否定. 一般来说, 我们有如下原则:

$$\begin{gathered}(\neg(\forall x\,\varphi)) \leftrightarrow (\exists x\,(\neg\varphi)); \\ (\neg(\exists x\,\varphi)) \leftrightarrow (\forall x\,(\neg\varphi)); \\ (\neg(\neg\,\varphi)) \leftrightarrow \varphi; \\ (\neg(\varphi\ \vee\ \psi)) \leftrightarrow ((\neg\varphi)\ \wedge\ (\neg\psi)); \\ (\neg(\varphi\ \wedge\ \psi)) \leftrightarrow ((\neg\varphi)\ \vee\ (\neg\psi)); \\ (\neg(\varphi \to \psi)) \leftrightarrow (\varphi\ \wedge\ (\neg\psi)); \\ (\neg(\varphi\ \leftrightarrow\ \psi)) \leftrightarrow (((\neg\varphi) \wedge \psi)\ \vee\ (\varphi\ \wedge\ (\neg\psi))).\end{gathered}$$

公理 1 (同一律[1]) $\forall x\, \forall y\,(x = y \leftrightarrow \forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y))$.

1 Axiom of Extensionality.

同一律, 作为集合论的一条公理, 又被称为**外延公理**, 因为它断言任何一个集合都唯一地由它的外延所确定.

在这里, 我们希望强调的是**用同一律定义式地引进了等号** $(=)$.

例 1.2 如下的表达式都是集合论语言中的表达式:

(1) $x \neq x$, $x \notin x$, $(x \in y) \wedge (y \in x)$, $(x \in y) \vee (y \in x)$;

(2) $((x \in y) \wedge (y \in z)) \to (x \in y)$, $(x \in y) \vee (x = y) \vee (y \in x)$;

(3) $\exists x \forall u \forall v (u \in x \leftrightarrow v \notin x)$, $\forall x\, \exists y (y \notin x)$;

(4) $x = y \to y = x$, $((x = y) \wedge (x \in z)) \to (y \in z)$;

(5) $\exists x (x \neq x)$, $\exists x \forall y (y \in x)$.

定义 1.2 每一个量词 $\exists$ 或者 $\forall$ 在任何一个表达式中出现时一定有一个紧随其后的**受约束变元**以及一个明确的**约束范围**(或者作用范围); 我们通常会在受约束变元之后用一个括弧来标明这一范围, 并且称此范围内的该变元的每一个出现为一个**受约束出现**. 当一个表达式 φ 中的某个变元 x 的某一个出现不在 φ 中的任何量词 $\exists x$ 或者 $\forall x$ 的约束范围之内时, 我们称该变元的这一出现为一个**自由出现**. 当一个变量 x 在一个表达式 φ 中有一个自由出现时, 我们就说这一变量 x 是表达式 φ 中的一个**自由变量**; 如果一个变量 x 在 φ 中出现, 而且不是 φ 中的一个自由变量, 那么我们就说变量 x 是表达式 φ 的一个**约束变量**.

定义 1.3 设 φ 是集合论的一个表达式, y 是一个变元, x 是 φ 中的一个自由变元.

(1) 如果 φ 中的每一个 $\exists y$ 或者 $\forall y$ 的约束范围内都没有 x 的自由出现, 那么, 我们说 y 可以在 φ 中取代或者替换 x; 否则, y 不可以在 φ 中取代或者替换 x.

(2) 如果 y 可以在 φ 中替换 x, 那么, 我们用 $\varphi(x/y)$ 或者 $\varphi(x;y)$ 来记在 φ 中将每一个 x 的自由出现都用 y 取代之后所得到的表达式.

量词交错出现顺序

当一个表达式中出现下述形式的量词组时, 我们简称其中有量词交错出现:

$$(\cdots \overbrace{\forall x_1 \cdots \forall x_k \,\exists y_1 \cdots \exists y_m}\, \varphi); \ (\cdots \overbrace{\exists x_1 \cdots \exists x_k \,\forall y_1 \cdots \forall y_m}\, \psi).$$

在此, 我们希望强调, 在书写集合论的表达式时, 一定要注意具有相同作用范围的全称量词与存在量词交错出现时从左到右应当有的书写顺序：它们应有的顺序不能随意更换, 因为不同的顺序不仅意味着表达式的不同, 更意味着含义的不同, 最终导致各自真假取值的天壤之别. 比如, 语句 $\forall y\, \exists x\, (y \in x)$ 与语句 $\exists x\, \forall y\, (y \in x)$ 是彼此交换了量词顺序的语句. 作为表达式, 它们自然是两个不同的表达式, 不仅如此, 它们的含义也截然相反. 后面我们将看到语句 $\forall y\, \exists x\, (y \in x)$ 是集合理论的一个定理 (见例 1.5); 而语句 $\exists x\, \forall y\, (y \in x)$ 则在集合理论中会被否定 (见例 1.4),

因为在集合理论中, 它的否定语句 $\neg(\exists x\,\forall y\,(y \in x))$ 会被证明为一个定理. 又比如, 考虑有关自然数的欧几里得定理：存在任意大的素数. 将这句话形式地写出来：$\forall x\,\exists y\,((x \in \mathbb{N}) \to (y \in P \wedge x < y))$, 其中, $x \in \mathbb{N}$ 表示 “x 是一自然数”, $y \in P$ 表示 “y 是一素数”, $x < y$ 表示 “y 比 x 大”. 交换这里的量词交错出现的顺序, 就得到语句 $\exists y\,\forall x\,((x \in \mathbb{N}) \to (y \in P \wedge x < y))$. 将这个语句翻译成中文就是：存在一个比所有自然数都大的素数 (一目了然, 这句话是一个错误命题, 因为任何一个素数的后继都是一个比它大的自然数). 后面我们会看到在集合论里可以证明欧几里得定理 (见定理 1.32); 而交换交错量词出现的顺序之后的语句当然会在集合论里被否定, 因为小于任何素数的自然数集合是有限的, 而整个自然数集合是无限的. 可见, 改变交错出现的量词顺序有可能改变了命题的真假命运. 实际中, 很多数学中的错误, 或者说日常生活中的思维错误, 都是源于无意识地交换了不该交换的交错量词出现的顺序. 当然, 对于作用范围相同的同类量词而言, 它们出现的先后顺序则完全无关紧要, 也就是说, 这种情形下, 交换连续出现的同类量词的顺序会无伤大雅. 比如, 语句 $\exists x\,\forall u\,\forall v\,(u \in x \leftrightarrow v \notin x)$ 与语句 $\exists x\,\forall v\,\forall u\,(u \in x \leftrightarrow v \notin x)$ 在逻辑上完全对等. 尽管在形式上看它们是不同的语句, 但从逻辑内涵而言, 或者从它们所承载的有关集合的语义来讲, 它们并没有差别. 再比如, 语句 $\exists x\,\exists y\,(x \neq y)$ 与语句 $\exists y\,\exists x\,(x \neq y)$ 就在逻辑上完全对等：两个存在量词出现的先后顺序, 除了形式上的差别之外, 不会对其语义内涵或者逻辑真假产生任何影响.

罗素悖论

我们现在可以用集合论的数学语言来表述前述的罗素定理:

定理 1.1 (罗素定理)　$(\neg[\exists x\ \forall y\ (y \in x \leftrightarrow y \notin y)])$.

证明　假设罗素定理不成立. 那么, $\exists x\ \forall y\ (y \in x \leftrightarrow y \notin y)$.

任取一个可以作为这一断言成立的证据的集合 M. 于是, 对于任意一个集合 y, 都一定满足表达式

$$y \in M \leftrightarrow y \notin y.$$

特别对于集合 M 来说也是如此. 这样, 我们得到

$$M \in M \leftrightarrow M \notin M.$$

这断然不能成立. □

我们应当注意到罗素定理的证明是纯粹的逻辑分析, 并没有用到关于集合的任何假设.

概括记号

(1) 设 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 是集合论语言的一个表达式, φ 中的全体自由变元都在彼此互不相同的变元符号

$$x_1,\cdots,x_n$$

之中. 此种情形下, 我们说表达式 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 为**彰显自由变元的表达式**.

(2) 对于给定的显示其全部自由变元的表达式 $\varphi(x_0,x_1,\cdots,x_n)$, 给定集合

$$a_1,\cdots,a_n,$$

我们用如下的**概括记号**

$$\{a \mid \varphi[a,a_1,\cdots,a_n]\}$$

来标记所有在以 $a_1,\cdots,a_n$ 为固定参数条件下具备 φ 所描述的性质的集合 a 之全体所称的**类**.

需要注意的是：类, 一般而言并不是集合, 当且仅当一个具体的类被证明或者被假设为集合时它才是集合; 由表达式 φ 与参数 $a_1,\cdots,a_n$ 所规定的性质便是关于那些 "个体" a 的**内涵**, 而由此内涵所确定的类

$$\{a \mid \varphi[a_1,\cdots,a_n,a]\}$$

便是**外延**. 这与我们比较熟悉的概念、概念之内涵与外延有可以比较之处：概念之内涵是对事物的性质规定, 而概念之外延是那些满足规定性质的事物之全体.

比如, $(\neg(x_0\in x_0))$ 是集合论语言的一个含有一个自由变元的表达式. 由这个表达式所确定的类为

$$U=\{a \mid (\neg(x_0\in x_0))[a]\}=\{a \mid a\notin a\}.$$

罗素定理断言：这个类不是一个集合, 即 $(\neg(\exists x\,(x=\{a \mid a\notin a\})))$.

1.1.2 集合论存在性公理

首先我们应该关心的是有没有我们可以关注的对象.

公理 2 *第一存在性*: $\exists x\ (x=x)$.

这就保证我们有对象可关注: 论域中有对象存在 (否则, 我们将做毫无意义的事情).

定义 1.4 (子集合[2]) *集合 x 是集合 y 的一个***子集合**, *记成 $x\subseteq y$, 当且仅当 x 的每一个元素都在 y 中. 即*

$$x\subseteq y\leftrightarrow\forall z\ (z\in x\to z\in y).$$

2 subset.

集合 y **包含**集合 x, 记成 $y \supseteq x$, 当且仅当 $x \subseteq y$. 集合 x 是集合 y 的**一个真子集合**, 记成 $x \subset y$, 当且仅当 $x \subseteq y$ 并且 $x \neq y$. 集合 y **真包含**集合 x, 记成 $y \supset x$, 当且仅当 $x \subset y$.

命题 1.1 $x = y \leftrightarrow (x \subseteq y \ \wedge \ y \subseteq x)$.

证明 $(\rightarrow)$ (练习.)

$(\leftarrow)$ 要证: $\forall z\, (z \in x \leftrightarrow z \in y)$.

任取一集合 z.

若 $z \in x$, 由 $x \subseteq y$ 得知 $z \in y$.

若 $z \in y$, 由 $y \subseteq x$ 得知 $z \in x$.

于是, $z \in x \leftrightarrow z \in y$. □

公理 3 (幂集公理[3])

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\, (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x).$$

命题 1.2 (幂集唯一性) 设 x 为一集合. 则至多有一个集合 y 满足如下要求:

$$\forall z\, (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x).$$

证明 设 x 为一个集合. 又设 y_1 和 y_2 为两个都满足如下要求的集合:

(1) $\forall z\, (z \in y_1 \leftrightarrow z \subseteq x)$,

(2) $\forall z\, (z \in y_2 \leftrightarrow z \subseteq x)$.

我们只要证明 $y_1 = y_2$. 由同一律,

$$y_1 = y_2 \leftrightarrow \forall z\, (z \in y_1 \leftrightarrow z \in y_2).$$

因此, 我们只要证明

$$\forall z\, (z \in y_1 \leftrightarrow z \in y_2).$$

为此, 任取一个集合 z. 则由 (1) 和 (2) 我们马上得到

$$z \in y_1 \leftrightarrow z \subseteq x \leftrightarrow z \in y_2.$$

所以, $z \in y_1 \leftrightarrow z \in y_2$. □

定义 1.5 对给定集合 x, 其幂集就是由它的全体子集合所组成的集合, 记成 $\mathfrak{P}(x)$,

$$\mathfrak{P}(x) = \{y \mid y \subseteq x\}.$$

3 Power Set Axiom.

命题 1.3 (分解唯一性) 设 x 为一个集合. 取 $\phi(a_1, \cdots, a_n, z)$ 为集合论的一个显示其全部自由变元的表达式. 那么, 至多存在一个满足如下要求的集合 y:

$$\forall z\,(z \in y \leftrightarrow (z \in x \ \wedge \ \phi(a_1, \cdots, a_n, z)))\,.$$

证明 (练习). □

公理 4 (分解原理[4])

$$\forall p_1 \cdots \forall p_n \forall x \,\exists y \,\forall z \ \ (z \in y \leftrightarrow (z \in x \ \wedge \ \phi(p_1, \cdots, p_n, z)))\,,$$

其中 $\phi(p_1, \cdots, p_n, z)$ 是集合论的一个表达式, 而且 y 不是 ϕ 中的一个自由变元.

我们将用概括记号 $\{z \in x \mid \phi(z)\}$ 来表示 x 中具有性质 ϕ 的全体元素 (个体) 所组成的子集合.

例 1.3 下述语句是分解原理的一个推论:

$$\forall x \,\exists y \,\forall z\,((z \in y) \leftrightarrow (z \in x \ \wedge \ z \notin z)).$$

证明 任意给定集合 x, 令

$$y = \{z \in x \mid z \notin z\}.$$

根据分解原理, 上述概括式定义出一个集合 y. □

例 1.4 语句 $\exists x \,\forall y\,(y \in x)$ 被分解原理所否定, 即在分解原理成立的条件下, 该语句的否定句成立.

证明 假设语句 $\exists x \,\forall y\,(y \in x)$ 成立. 令 x 为一个满足要求 $\forall y\,(y \in x)$ 的集合. 依旧考虑表达式 $(z \notin z)$. 根据分解原理, $y = \{z \in x \mid z \notin z\}$ 是一个集合 (这也是上面的例子所给出的结果). 根据关于 x 的假设, 所有的集合都在 x 之中, 尤其是这个具体的集合 y, 它就在 x 之中. 既然 $y \in x$, 我们自然可以发问: $y \in y$ 吗? 如果 $y \in y$, 根据定义, y 是 x 中所有那些满足表达式 $z \notin z$ 要求的元素, y 是 x 中的一元, $y \in y$ 就自然蕴涵着 $y \notin y$; 如果 $y \notin y$, 因为 $y \in x$, 根据 y 的定义, 必须有 $y \notin y$. 因此, 无论如何, 都是矛盾.

由此可见, 分解原理否定了语句 $\exists x \,\forall y\,(y \in x)$. 也就是说, 在分解原理之下, 语句 $\forall x \,\exists y\,(y \notin x)$ 成立. □

命题 1.4 存在唯一的一个不含有任何元素的集合.

证明 (存在性) 取 x 为任意一个存在的集合 (由第一存在性). 考虑表达式

$$\phi(z): \ \neg(z = z).$$

4 Axiom Schema of Comprehension; Axiom Schema of Separation.

依分解原理, $\{z \in x \mid z \neq z\}$ 是一个集合, 暂且记成 y.

断言 y 不含任何元素.

这是因为 $\forall z\,(z = z)$ 是同一律的一个推论.

(唯一性) (练习, 用同一律.)

定义 1.6 (空集) 唯一的不含任何元素的集合被称为**空集**, 并记成 $\varnothing$. □

注意: $\forall x\,(\varnothing \subseteq x)$.

公理 5 (配对公理[5])

$$\forall x\,\forall y\,\exists u\,\forall z\,(z \in u \leftrightarrow (z = x \ \vee\ z = y)).$$

定义 1.7 称恰好由集合 x 和集合 y 为元素所构成的集合为 x 和 y 的**无序对集合**, 并以概括记号记成 $\{x, y\}$. 当 $x = y$ 时, 这一配对集合就退化成一个**单点集合** $\{x\}$, 即 $\{x\} = \{x, x\}$.

例 1.5 语句 $\forall y\,\exists x\,(y \in x)$ 是配对公理的一个推论.

证明 设 y 是一个任意给定的集合. 令 $x = \{y, y\}$. 根据配对公理, x 是一个集合. 自然, $y \in x$. □

公理 6 (并集公理[6])

$$\forall x\,\exists y\,\forall z\,(z \in y \leftrightarrow \exists u\,(u \in x \ \wedge\ z \in u)).$$

定义 1.8 称集合 $\{z \mid \exists\, u\,(u \in x \ \wedge\ z \in u)\}$ 为集合 x 的并集, 记成 $\bigcup x$.

注意: 记号 $\bigcup x$ 没有二义性.

定义 1.9 (并) $x \cup y = \bigcup\{x, y\}$.

定义 1.10 设 A 为一个非空集合. 我们定义 A 的交集, 记成 $\bigcap A$, 如下:

$$\bigcap A = \{y \mid \forall a\,(a \in A \to y \in a)\}.$$

定义 1.11 (1) (交) $x \cap y = \{z \in x \mid z \in y\}$;

(2) (差) $x - y = \{z \in x \mid z \notin y\}$;

(3) (对称差) $x \triangle y = (x - y) \cup (y - x)$.

定义 1.12 $\mathbf{S}(x) = x \cup \{x\}$.

公理 7 (无穷公理[7])

$$\exists x\,((\varnothing \in x) \wedge (\forall u\,(u \in x \to \mathbf{S}(u) \in x))).$$

5 Axiom of Pairs.
6 Axiom of Union.
7 Axiom of Infinity.

当一个集合 x 满足下列要求时, 记成 $\mathrm{Inf}(x)$, 我们就说这一集合验证无穷公理, 或者是由无穷公理所提供的:

$$((\varnothing \in x) \wedge (\forall u\ (u \in x \to u \cup \{u\} \in x))).$$

于是, 无穷公理就是这样一个语句: $\exists x\ \mathrm{Inf}(x)$.

为什么这一语句被称为无穷公理? 后面, 我们将严格定义什么是有限和什么是无限. 我们将会看到任何一个验证无穷公理的集合一定是无限的, 因为每一个自然数都是这一集合的一个元素.

那么, 什么是自然数呢? 我们将在 1.2 节中来专门讨论.

1.2 基本概念

1.2.1 关系和函数

关系和函数是数学中最为常用和通用的两个基本概念. 在集合论里, 与其他数学实践中不同的地方在于每一个关系, 每一个函数, 也都是一个集合. 正像我们前面已经看到过的那样: 任何两个集合的配对, 由它们组成的无序对是一个集合; 任何一个集合的幂集是一个集合; 任何集合的并集是一个集合. 下面我们将看到由任何两个集合组成的有序对也是一个集合; 任何两个集合的笛卡尔乘积还是一个集合. 于是, 每一个函数, 每一个关系, 也就都是集合.

定义 1.13 $(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}$, 称 (x,y) 是由 x 和 y 所组成的**有序对**(集合); 并且称 x 为这一有序对的第一元素 (左元素), 称 y 为这一有序对的第二元素 (右元素); 为了方便, 记成 $x=((x,y))_0$, $y=((x,y))_1$. 即, 若 $z=(x,y)$, 则 $(z)_0=x$, $(z)_1=y$, $z=((z)_0,(z)_1)$.

由定义, 任何两个集合组成的有序对也是一个集合.

定理 1.2 $(x,y)=(u,v)$ 当且仅当 $x=u$, $y=v$.

证明 (1) $\{z,a\}=\{z,b\}\to a=b$;

(2) $\left((\{x\}\in(x,y)=(u,v))\to\begin{pmatrix}(\{x\}=\{u\}\vee\{x\}=\{u,v\})\to\\((u\in\{x\})\to(u=x))\end{pmatrix}\right)$;

(3) $(\{x,y\}=\{u,v\}\ \wedge\ x=u)\to y=v$. □

命题 1.5 "z 是一个有序对" 当且仅当

$$\exists x\in z\exists y\in z(\varphi(z,x,y)\wedge(\exists b\in y\exists a\in x(a\in y\wedge(\forall v\in x(v=a))\wedge\psi(y,a,b)))),$$

其中, $\varphi(z,x,y)$ 是 $(\forall u\in z(u=x\vee u=y))$, $\psi(y,a,b)$ 是 $(\forall v\in y(v=a\vee v=b))$.

定义 1.14　集合 A 和集合 B 的**笛卡尔乘积**, 记成 $A \times B$, 定义为

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \ \wedge \ b \in B\}.$$

定理 1.3　$\forall x \, \forall \, y \, \exists \, u \, (u = x \times y)$.

证明

$$A \times B = \{z \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A \cup B)) \mid \exists \, a \, \exists \, b \, (a \in A \ \wedge \ b \in B \ \wedge \ z = (a, b))\}. \qquad \square$$

定义 1.15 (关系)　(1) 当一个集合 R 的每一个元素都是一个有序对时, 我们称集合 R 为一个**二元关系**.

(2) 对于一个二元关系 R, 我们规定其**定义域**, 记成 $\mathrm{dom}(R)$, 是如下的集合:

$$\mathrm{dom}(R) = \{x \mid \exists y \ (x, y) \in R\} = \{(z)_0 \mid z \in R\},$$

我们也规定其**值域**, 记成 $\mathrm{rng}(R)$, 是如下的集合:

$$\mathrm{rng}(R) = \{y \mid \exists x \ (x, y) \in R\} = \{(z)_1 \mid z \in R\},$$

并称集合 $\mathrm{dom}(R) \cup \mathrm{rng}(R)$ 为关系 R 的**作用域**.

(3) 对于一个二元关系 R, 我们规定它的**逆关系**, 记成 R^{-1}, 为如下的集合:

$$R^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}.$$

定义 1.16 (函数)　(1) 我们称一个关系 F 为一个**函数**当且仅当 F 满足如下要求:

$$\forall x \, \forall y \, \forall z \, (((x, y) \in F \wedge (x, z) \in F) \to y = z).$$

也就是说, 对于任意一个 $x \in \mathrm{dom}(F)$, 仅有唯一一个 $y \in \mathrm{rng}(F)$ 满足 $(x, y) \in F$.

(2) 对于一个函数 F, 我们将 $(x, y) \in F$ 也写成 $y = F(x)$, 即

$$y = F(x) \iff (x, y) \in F.$$

并称 y 为函数 F 在 x 处的值, 或者 y 是 x 在 F 下的映像.

(3) 我们说 F 是从集合 A 到集合 B 上的一个**映射**, 记成 $F : A \to B$, 当且仅当 F 是一个函数, 而且 $\mathrm{dom}(F) = A$, $\mathrm{rng}(F) \subseteq B$. 这种情形下, 称 A 为函数 F 之**定义域**; 称 B 为 F 的**值域**; 称 $\mathrm{rng}(F)$ 为 F 的**像集**.

(4) 对于一个从 A 到 B 的映射, $F : A \to B$, 我们称 F 是一个**满射**当且仅当 $\mathrm{rng}(F) = B$; 称 F 为一个**单射**当且仅当对于任意的 $y \in \mathrm{rng}(F)$, 只有唯一的 $x \in A$ 是方程 $y = F(x)$ 的解, 我们也称单射为一对一的映射; 如果 F 既是一个满射又是一个单射, 就称 $F : A \to B$ 为一个**双射**, 或者为一个**一一对应**, 或者**可逆函数**.

定义 1.17 我们用 B^A 来记全体从 A 到 B 的映射所组成的集合:

$$B^A = \{f \mid f : A \to B\}.$$

有时为了某种需要, 也用 ${}^AB$ 来记集合 B^A. 换句话说, ${}^AB = B^A$.

定义 1.18 设 $f : A \to B$ 且 $D \subseteq A, C \subseteq B$. 我们将 f 到 D 上的**限制**, 记成 $f \restriction D$, 定义为如下的一个集合:

$$f \restriction D = \{(a, b) \in f \mid a \in D\}.$$

又定义

$$f[D] = f''D = \{b \in B \mid \exists a \in D\ ((a, b) \in f)\}$$

为 D 在映射 f 下的**像集**. 再定义

$$f^{-1}[C] = \{a \in A \mid \exists b \in C\ ((a, b) \in f)\}$$

为 C 在映射 f 下的**原像集** (注意, 记号 f^{-1} 只是表示一种关系, 它并不意味 f 是一个可逆函数; 只有当 f 可逆时, f^{-1} 才是一个函数).

定义 1.19 (等价关系) 设 A 为一集合. 我们称一个二元关系 E 为 A 上的一个**等价关系**当且仅当 $E \subseteq A \times A$ 并且 E 满足如下三个条件:

(1) (自反性) $\forall x\ (x \in A \to (x, x) \in E)$;

(2) (对称性) $\forall x\ \forall y\ ((x \in A\ \wedge\ y \in A\ \wedge\ (x, y) \in E) \to (y, x) \in E)$;

(3) (传递性) $\forall x\ \forall y\ \forall z\ \left(\left(\begin{array}{c} x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge \\ (x, y) \in E \wedge (y, z) \in E \end{array}\right) \to (x, z) \in E\right)$.

例 1.6 设 A 为一个集合. 对任意的 $x \in A$, $y \in A$, 我们说 $(x, y) \in E_=$ 当且仅当 $x = y$. 那么, $E_=$ 就是 A 上的一个等价关系. 我们称这一等价关系为 A 上的等同关系.

定义 1.20 (复合) (1) 设 S 和 T 是两个二元关系. 我们定义这两个关系的**复合关系**为如下的集合:

$$S \circ T = \{(a, b) \mid \exists c\ (a, c) \in S \wedge (c, b) \in T\}.$$

(2) 设 $F : A \to B$ 和 $G : B \to C$ 是两个函数. 定义这两个函数的**复合函数**为如下的集合:

$$F \circ G = \{(a, c) \mid \exists b\ (a, b) \in F \wedge (b, c) \in G\}.$$

1.2.2 势比较

定义 1.21 (等势) 我们说两个集合 x 和 y **等势**当且仅当在它们之间存在一个双射 (一一对应).

我们将 x 和 y 等势记成 $|x| = |y|$.

我们说 x 的势小于等于 y 的势, 记成 $|x| \leqslant |y|$, 当且仅当存在一个从 x 到 y 的单射.

我们说 x 的势小于 y 的势 (x 比 y **弱势**, y 比 x **强势**), 记成 $|x| < |y|$, 当且仅当

$$|x| \leqslant |y| \wedge |x| \neq |y|.$$

命题 1.6 (1) $|A| = |A|$.

(2) 如果 $|A| = |B|$, 那么 $|B| = |A|$.

(3) 如果 $|A| = |B|$ 和 $|B| = |C|$, 那么 $|A| = |C|$.

(4) $|A| \leqslant |A|$.

(5) 如果 $|A| \leqslant |B|$ 和 $|A| = |C|$, 那么 $|C| \leqslant |B|$.

(6) 如果 $|A| \leqslant |B|$ 和 $|B| = |C|$, 那么 $|A| \leqslant |C|$.

(7) 如果 $|A| \leqslant |B|$ 以及 $|B| \leqslant |C|$, 那么 $|A| \leqslant |C|$.

定理 1.4 (康托尔不等式) $\forall x\, (|x| < |\mathfrak{P}(x)|)$.

证明 对任意的 $z \in x$, 令 $f(z) = \{z\}$. 则 $f : x \to \mathfrak{P}(x)$ 是一个单射. 因此, $|x| \leqslant |\mathfrak{P}(x)|$.

现在我们希望证明 $|x| \neq |\mathfrak{P}(x)|$. 若其不然, $|x| = |\mathfrak{P}(x)|$. 设 $f : x \to \mathfrak{P}(x)$ 为一个双射. 我们希望得出 f 不是满射的结论. 这将是我们要得的矛盾. 为此, 考虑如下集合:

$$A = \{a \in x \mid a \notin f(a)\}.$$

于是, $A \in \mathfrak{P}(x)$. 由于 f 是一个满射, 可取到一个满足方程 $A = f(z)$ 的 $z \in x$. 我们问: z 是否在 A 中? 如果 $z \in A$, 也就是说, $z \notin f(z)$, 但是, $f(z) = A$, 矛盾; 如果 $z \notin A$, 因为 $A = f(z)$, 也就是说, $z \notin f(z)$, 由定义, $z \in A$, 矛盾.

于是我们得出结论: $|x| \neq |\mathfrak{P}(x)|$. □

康托尔不等式证明中使用的方法被称为**康托尔对角化方法**, 这种方法我们在罗素定理的证明中已经见到过, 但康托尔自然是第一个使用这一方法之人.

命题 1.7 $|\mathfrak{P}(x)| = |\{\varnothing, \{\varnothing\}\}^x|$.

证明 (练习.) □

1.2.3 集合论形式推理

作为一种数学理论, 集合论自然而然涉及证明, 这就自然意味着集合论必然有

自己默认的作为形式推理基础的永真命题以及形式推理方式. 这里就让我们明确这些默认真理以及形式推理方式.

定义 1.22 集合论所依赖的逻辑公理如下:

(1) (逻辑运算律) 设 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ 为集合论的表达式. 那么下述表达式都是逻辑公理:

(a) $((\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \varphi_3)) \to ((\varphi_1 \to \varphi_2) \to (\varphi_1 \to \varphi_3)))$;

(b) $(\varphi_1 \to \varphi_1)$;

(c) $(\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \varphi_1))$;

(d) $(\varphi_1 \to ((\neg\varphi_1) \to \varphi_2))$;

(e) $(((\neg\varphi_1) \to \varphi_1) \to \varphi_1)$;

(f) $((\neg\varphi_1) \to (\varphi_1 \to \varphi_2))$;

(g) $(\varphi_1 \to ((\neg\varphi_2) \to (\neg(\varphi_1 \to \varphi_2))))$;

(2) (特化原理) 设 φ 为一个集合论的表达式, y 为一个变元, 而且 y 在 φ 中可以替换变元符号 x_i. 那么

$$((\forall x_i \varphi) \to \varphi(x_i; y))$$

就是一条集合论的逻辑公理;

(3) (全称量词分配律) 设 φ_1,φ_2 为集合论的表达式. 那么

$$((\forall x_i(\varphi_1 \to \varphi_2)) \to ((\forall x_i \varphi_1) \to (\forall x_i \varphi_2)))$$

是一条逻辑公理;

(4) (无关量词引入规则) 设 φ 为一个集合论的表达式, x_i 不是 φ 中的自由变元, 那么 $(\varphi \to (\forall x_i \varphi))$ 就是一条集合论的逻辑公理;

(5) (恒等律) 对每一个变元符号 x_i, 表达式 $(x_i = x_i)$ 就是一条逻辑公理;

(6) (等同律) 设 φ_1 和 φ_2 为集合论的两个表达式, 而且在 φ_1 和 φ_2 中 x_j 可以替换 x_i. 如果分别在 φ_1 和 φ_2 中用 x_j 同时替换 x_i 的每一次出现之后所得到的两个表达式是同一个表达式, 那么

$$((x_j = x_i) \to (\varphi_1 \to \varphi_2))$$

就是一条逻辑公理;

(7) (全域化法则) 若 φ 是一条逻辑公理, 那么 $(\forall x_i \varphi)$ 也是一条逻辑公理;

(8) 任何一条逻辑公理必然由上述方案递归得到, 别无其他.

定义 1.23 集合论的形式推导规则[8]如下:

由表达式 $\varphi \to \psi$ 是一条定理, 表达式 φ 也是一条定理, 那么, 表达式 ψ 就是一条定理.

8 modus ponens.

从现在起, 我们的集合论除了前面引进的集合论公理之外, 我们将默认上述从一阶逻辑那里租借过来的逻辑公理和推理法则. 将这些租借过来的逻辑公理以及推理法则与我们前面已经引进的和后面将要引进的集合论 (非逻辑公理) 融合为一个整体系统. 犹如任何一个其他数学分支那样, 我们在分析论证时往往只提所涉及的非逻辑公理, 而将所使用的逻辑公理和推理法则当成默认真理.

1.3 自然数集合

1.3.1 最小无穷传递集合

1.1 节已经引进了无穷公理, 并且断言每一个验证无穷公理的集合一定含有每一个自然数为其元素. 那么什么是自然数呢?

这就是我们现在要来看的一个比较复杂一点的集合的例子. 这一例子由分解原理和无穷公理所给出. 它将是我们的第一个也是最简单的一个无穷集合. 这一集合就是集合论里的自然数集合, 它的每一个元素就是一个自然数. 我们也将看到, 这些集合的确很好地表示了我们对于自然数的理解和认识.

对于任意的一个验证无穷公理的集合 u, 我们定义它的一个子集合 $W(u)$ 如下:

$$W(u) = \{a \mid a \in u \wedge \forall v\ (\mathrm{Inf}(v) \to a \in v)\}.$$

定理 1.5 (1) 如果 u 验证无穷公理, 那么 $W(u)$ 也验证无穷公理. 也就是说, $\mathrm{Inf}(u) \to \mathrm{Inf}(W(u))$.

(2) 如果 u_1 和 u_2 都验证无穷公理, 那么 $W(u_1) = W(u_2)$.

(3) 存在唯一的一个同时满足如下两项要求的集合 u:

(a) u 验证无穷公理;

(b) $W(u) = u$.

证明 我们先来证 (1). 为此, 设 $\mathrm{Inf}(u)$ 成立. 首先, $\varnothing \in u$, 而且如果 $\mathrm{Inf}(v)$ 成立, 那么 $\varnothing \in v$. 所以, 有 $\varnothing \in W(u)$. 其次, 设 $x \in W(u)$, 我们要证明 $S(x) \in W(u)$. 假设 $\mathrm{Inf}(v)$ 成立. 因为 $x \in W(u)$, $x \in u$ 而且 $x \in v$, 从而 $S(x) \in u$ 以及 $S(x) \in v$. 由此, $S(x) \in W(u)$. 也就是说, $\mathrm{Inf}(W(u))$ 成立.

我们再来证 (2). 设 $\mathrm{Inf}(u_1)$ 和 $\mathrm{Inf}(u_2)$ 同时成立, 欲证 $W(u_1) \subseteq W(u_2)$. 为此, 任取 $a \in W(u_1)$. 因为 $\mathrm{Inf}(u_2)$ 以及 $\forall v\ (\mathrm{Inf}(v) \to a \in v)$, 所以 $a \in u_2$, 从而

$$a \in W(u_2).$$

同理得到 $W(u_2) \subseteq W(u_1)$.

最后我们来证 (3). 先证存在性. 任取一个验证无穷公理的集合 v. 令 $u = W(v)$. 由 (1), u 验证无穷公理. 再由 (2), $W(u) = W(v) = u$.

其次我们来看唯一性：设 u 和 v 都验证无穷公理而且都是 W 的不动点. 那么

$$u = W(u) = W(v) = v.$$ □

定义 1.24 我们用 ω(读作 omega[9]), 或者 $\mathbb{N}$, 来记这个唯一的同时令

$$\mathrm{Inf}(u) \text{ 和 } W(u) = u$$

成立的集合 u, 并且称 ω, 或者 $\mathbb{N}$, 为自然数集合; 一个集合 x 是一个自然数当且仅当 $x \in \omega$.

例 1.7 $0 = \varnothing$.

$1 = \{\varnothing\} = \{0\}$.

$2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{0, 1\}$.

$3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{0, 1, 2\}$.

$4 = \{0, 1, 2, 3\}$, $5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \cdots$.

$\cdots\cdots$,

类似地, 我们可以规定: $n + 1 = n \cup \{n\} = \{0, 1, \cdots, n\}$. 可以看到, 上述这些集合都是 ω 的元素.

命题 1.8 如果 $\mathrm{Inf}(u)$ 成立, 那么 $\omega \subseteq u$.

证明 假设 $\mathrm{Inf}(u)$ 成立. 于是, $\omega = W(\omega) = W(u) \subseteq u$. □

定理 1.6 1. $\forall a \in \omega\ (a = \varnothing \vee \varnothing \in a)$.

2. $\forall a \in \omega\ \forall b \in \omega\ (a \in \mathbf{S}(b) \iff (a \in b \vee a = b))$.

3. $\forall a \in \omega\ (a \subseteq \omega)$.

4. $\forall a \in \omega\ \forall b \in \omega\ \forall c \in \omega (a \in b \wedge b \in c \to a \in c)$.

证明 1. 考虑 $z = \{a \in \omega \mid a = \varnothing \vee \varnothing \in a\}$. 我们来证 $z = \omega$. 为此, 我们来证 $\mathrm{Inf}(z)$.

首先, $\varnothing \in z$. 其次, 设 $x \in z$. 无论 $x = \varnothing$, 还是 $\varnothing \in x$, 都有

$$\varnothing \in \mathbf{S}(x) = x \cup \{x\}.$$

所以, $\mathbf{S}(x) \in z$.

于是得到 $\mathrm{Inf}(z)$.

2. 显然.

3. 考虑 $z = \{a \in \omega \mid a \subseteq \omega\}$. 我们来证 $\mathrm{Inf}(z)$. 由此得到 $z = \omega$.

第一, $\varnothing \subseteq \omega$, 故 $\varnothing \in z$. 第二, 设 $x \in z$. 那么 $x \in \omega$ 而且 $x \subseteq \omega$. 从而,

$$\mathbf{S}(x) = x \cup \{x\} \subseteq \omega.$$

---

9 ω, 希腊字母.

4. 考虑 $z=\{x\in\omega \mid \forall a\in\omega\,\forall b\in\omega\,((a\in b\wedge b\in x)\to a\in x)\}$. 我们来证 $\mathrm{Inf}(z)$.

首先, $\varnothing\in z$. 其次, 设 $x\in z$, $a\in b$, $b\in\omega$, 以及 $b\in\mathbf{S}(x)$. 欲证 $a\in\mathbf{S}(x)$. 因为 $b\in\mathbf{S}(x)$, 我们知道或者 $b\in x$ 或者 $b=x$. 如果 $b\in x$, 从 $x\in z$ 我们知道 $a\in x$; 如果 $b=x$, 从 $a\in b$ 我们知道 $a\in x$. 所以无论何者, 都有 $a\in\mathbf{S}(x)$. □

定义 1.25 (传递集合) 我们称一个集合 x 为一个**传递集合**当且仅当

$$\forall a\,(a\in x\to a\subset x).$$

例 1.8 (1) ω 是一个传递集合.

(2) ω 的每一个元素都是传递集合.

证明 (1) 由定理 1.6 之 3. 所给出. 欲见 (2) 成立, 令 $x\in\omega$. 那么 $x\subseteq\omega$. 若 $y\in x$, 那么 $y\in\omega$, 从而 $y\subseteq\omega$. 现设 $y\in x$ 而且 $a\in y$. 于是 $y\in\omega$ 而且 $a\in\omega$. 由定理 1.6 之 4., 我们得到 $a\in x$. 也就是说, 如果 $y\in x$, 那么 $y\subseteq x$. □

定理 1.7 5. $\forall x\in\omega\,(x\notin x)$.

6. $\forall x\in\omega\,\forall y\in\omega\,(x\in y\to y\notin x)$.

7. $\forall x\in\omega\,\forall y\in\omega\,(x\in y\to(y=\mathbf{S}(x)\ \vee\ \mathbf{S}(x)\in y))$.

8. $\forall x\in\omega\,\forall y\in\omega\,(x\in y\ \vee\ x=y\ \vee\ y\in x)$.

9. $\forall x\in\omega\ (x\neq\varnothing\to\exists y\,(y\in x\ \wedge\ x=y\cup\{y\}))$.

证明 5. 考虑 $z=\{x\in\omega\mid x\notin x\}$. 我们来证 $\mathrm{Inf}(z)$.

首先, $\varnothing\notin\varnothing$. 所以, $\varnothing\in z$. 其次, 设 $x\in z$. 欲见 $\mathbf{S}(x)\in z$. 如果 $\mathbf{S}(x)\in\mathbf{S}(x)$, 那么必有或者 $\mathbf{S}(x)\in x$ 或者 $\mathbf{S}(x)=x$. 因为总有 $x\in\mathbf{S}(x)$, 无论何者, 都有 $x\in x$. 但是, $x\in z$ 表明 $x\notin x$. 矛盾. 因此, $\mathbf{S}(x)\notin\mathbf{S}(x)$.

6. 假设有 $x\in\omega$ 和 $y\in\omega$ 构成一对反例. 即, $x\in y$ 且 $y\in x$. 由传递性, 必有 $x\in x$. 但这不可能.

7. 任取 $x\in\omega$. 考虑集合 $z=\{y\in\omega\mid x\in y\to(y=\mathbf{S}(x)\vee\mathbf{S}(x)\in y)\}$. 我们来证 $\mathrm{Inf}(z)$.

首先, $\varnothing\in z$. 其次, 假设 $a\in z$, 欲得 $\mathbf{S}(a)\in z$. 另设 $x\in\mathbf{S}(a)$. 故或者 $x\in a$ 或者 $x=a$. 如果 $x\in a$, 那么从 $a\in z$ 知道或者 $a=\mathbf{S}(x)$ 或者 $\mathbf{S}(x)\in a$. 但无论如何都有 $\mathbf{S}(x)\in\mathbf{S}(a)$. 如果 $x=a$, 那么 $\mathbf{S}(x)=\mathbf{S}(a)$. 因此, 总有 $\mathbf{S}(a)\in z$.

8. 考虑集合 $u=\{x\in\omega\mid\forall y\in\omega\ (x\in y\vee x=y\vee y\in x)\}$. 我们来证 $\mathrm{Inf}(u)$.

由前面的事实, 我们知道 $\forall y\in\omega(y=\varnothing\vee\varnothing\in y)$. 所以, $\varnothing\in u$.

现在设 $x\in u$, 欲得 $\mathbf{S}(x)\in u$. 任取 $y\in\omega$. 依假设, 我们有或者 $x\in y$, 或者 $x=y$, 或者 $y\in x$.

如果 $x\in y$, 那么由 7., 或者 $y=\mathbf{S}(x)$, 或者 $\mathbf{S}(x)\in y$; 如果 $x=y$, 那么 $y\in\mathbf{S}(x)$; 如果 $y\in x$, 那么 $y\in\mathbf{S}(x)$. 因此, 无论怎样, $\mathbf{S}(x)\in u$.

9. 考虑集合 $u=\{x\in\omega\mid x\neq\varnothing\to\exists y\,(y\in x\ \wedge\ x=y\cup\{y\})\}$. 我们来证 $\mathrm{Inf}(u)$.

首先, $\varnothing \in u$. 其次, 设 $x \in u$. 那么, $\exists y\,(y \in \mathbf{S}(x) \wedge \mathbf{S}(x) = y \cup \{y\})$. 所以, $\mathbf{S}(x) \in u$. □

1.3.2 自然数之序

定义 1.26 (大小比较) 对于 $x \in \omega$ 和 $y \in \omega$, 定义

$$x < y \leftrightarrow x \in y;$$
$$x \leqslant y \leftrightarrow (x \in y \vee x = y).$$

上面的定理 1.7 表明, 这样一个关系 $<$ 是自然数集合 ω 上的一个**线性序**.

定义 1.27 (序) 对于一个非空集合 W 和它之上的一个二元关系 $<$ 而言, 我们说 $<$ 是 W 的一个**线性序**当且仅当这一关系 $<$ 满足如下条件:

(1) (反自反性) $\forall x\,(x \in W \to x \not< x)$;

(2) (传递性) $\forall x\,\forall y\,\forall z\,((x \in W \wedge y \in W \wedge z \in W \wedge x < y \wedge y < z) \to x < z)$;

(3) (可比较特性) $\forall x\,\forall y\,((x \in W \wedge y \in W) \to (x < y \vee x = y \vee y < x))$.

我们将记成 $(W, <)$, 并称 $(W, <)$ 为一个**线性有序集**. 如果 $<$ 仅仅满足条件 (1) 和 (2), 我们就说 $<$ 是 W 上的一个**偏序**, 而称 $(W, <)$ 为一个**偏序集**.

自然数集合 ω 在这样一个关系 $<$ 下是一个线性有序集合, 而每一个自然数就是一个所有比它小的自然数的集合. 实际上, 自然数集合上的这个由 $\in$ 所给出的线性序还有另外一个非常重要的性质, 即每一个非空的自然数子集合一定有一个 $\leqslant$-最小元素, 也就是我们后面将看到的: 这是一个秩序集合.

定理 1.8 10. $\forall a \in \omega \forall x((\varnothing \neq x \subseteq a) \to \exists b(b \in x \wedge b \cap x = \varnothing))$.

11. 如果 $A \subseteq \omega$, 而且 $A \neq \varnothing$, 那么, $\exists a(a \in A \wedge \forall x \in A\,(a = x \vee a \in x))$, 也就是说, A 有一个 $\leqslant$-最小元素, 记成 $\min(A)$.

12. $\forall a \in \omega \forall x((\varnothing \neq x \subseteq a) \to \exists b(b \in x \wedge \forall a \in x(a \in b \vee a = b)))$.

13. 如果 $A \subseteq \omega$, $A \neq \varnothing$, 并且 $\exists b \in \omega \forall a \in A\,(a \subseteq b)$, 那么,

$$\exists a(a \in A \wedge \forall x \in A\,(a = x \vee x \in a)),$$

也就是说, A 有一个 $\leqslant$-最大元素, 记成 $\max(A)$.

证明 10. 考虑 $z = \{a \in \omega \mid \forall x((\varnothing \neq x \subseteq a) \to \exists b(b \in x \wedge b \cap x = \varnothing))\}$. 我们来证明 $z = \omega$. 为此, 我们来证 $\mathrm{Inf}(z)$ 成立.

(i) $\varnothing \in z$.

(ii) $a \in z \to \mathbf{S}(a) \in z$. 设 $a \in z$ 且设 $x \subseteq \mathbf{S}(a)$ 非空. 那么或者 $x \cap a \neq \varnothing$, 或者 $x = \{a\}$. 如果前者成立, 那么我们由 $a \in z$ 得到 $\exists b(b \in x \wedge b \cap x = \varnothing)$; 如果后者成立, 那么因为 $a \notin a$ 我们得到 $a \in x$ 而且 $a \cap x = \varnothing$.

这就证明了 $\mathrm{Inf}(z)$, 从而 $\omega = z$.

11. 设 $A \subseteq \omega$, 并且 $A \neq \varnothing$. 我们来证 $\exists a\,(a \in A \wedge a \cap A = \varnothing)$.

因为 A 非空, 令 $a \in A$. 如果 $a \cap A = \varnothing$, 我们得到所需要的; 如果 $a \cap A \neq \varnothing$, 我们来证

$$\exists b\,(b \in A \wedge b \cap A = \varnothing).$$

由 (1), 令 $b \in (a \cap A)$ 满足要求 $b \cap (a \cap A) = \varnothing$. 因为 $b \in a$, $b \subset a$, 从而 $b \cap a = b$. 又因为 $b \cap (a \cap A) = (b \cap a) \cap A = (a \cap b) \cap A = b \cap A$. 所以, $b \cap A = \varnothing$.

12. 和 13. 之证明留作练习. □

定理 1.9 (数学归纳法原理) 设 $P(x, a_1, \cdots, a_n)$ 是集合论语言的带有一个自由变元 x 和参数变元 $a_1, \cdots, a_n$ 的一个表达式. 假设

(1) $P(0)$ 成立;

(2) 对任何一个 $n \in \omega$, 如果 $P(n)$ 成立, 那么 $P(n+1)$ 也一定成立.

那么, 对于任何一个自然数 $n \in \omega$, $P(n)$ 都成立.

证明 令 $A = \{n \in \omega \mid P(n)\}$. 由定义, $A \subseteq \omega$. 另外, 由假设, 我们看到 A 是一个验证无穷公理的集合. 因此, $\omega \subseteq A$.

另外一种证明：假设 $A \neq \omega$, 那么, $\omega - A \neq \varnothing$. 用前述事实, 我们考虑它的最小元素. 应用前面的性质, 我们得到矛盾. □

这一例子表明, 上述这些公理已经可以保证在我们的论域中存在很复杂的集合了, 例如,

$$\omega, \mathfrak{P}(\omega), \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\omega)), \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\omega))), \cdots.$$

作为归纳法原理的一个应用, 我们来证明如下的鸽子笼原理.

定理 1.10 (鸽子笼原理) 设 $n \in \mathbb{N}$. 如果 $f : n \to n$ 是一个单射, 那么 f 必是一满射; 从而, 如果

$$f : (n+1) \to n,$$

那么 f 便不可能是单射.

证明 应用归纳法原理 (定理 1.9).

当 $n = 0$ 时, 所论函数是 $\varnothing$, 结论自然成立.

现设 $f : n+1 \to n+1$ 为一个单射. 我们来验证：f 必是一满射.

情形一 $f[n] \subseteq n$.

此种情形下, $f\restriction_n : n \to n$ 是一单射. 根据归纳假设, 它是满射. 由于 f 是单射, 且 $f[n] = n$, 必有 $f(n) = n$. 于是, f 是满射.

情形二 $f[n] \not\subseteq n$.

此时, 令 $k \in n$ 为唯一满足等式 $f(k) = n$ 之自然数. 由于 f 是单射, 对于所有的 $i \in n$ 都有 $f(i) \neq f(n)$; 以及当 $i \neq k$ 时必有 $f(i) \in n$, 并且 $f(n) \in n$. 我们以如

下等式定义 $g : n \to n$：

$$g(i) = \begin{cases} f(i) & \text{如果 } i \neq k, \\ f(n) & \text{如果 } i = k. \end{cases}$$

g 是 n 上的一个单射. 根据归纳假设, g 必是满射. 因此, f 就是一满射. □

推论 1.1 (1) $\forall n \in \omega\, (|n| < |n+1|)$;

(2) $\forall n \in m \in \omega\, (|n| < |m|)$;

(3) $\forall n \in \omega\, (|n| < |\omega|)$.

定义 1.28 (界) 子集合 $X \subseteq \omega$ 在 ω 中**无界**当且仅当 $\forall n \in \omega\, \exists m \in X\ (n < m)$. 子集合 $X \subseteq \omega$ 在 ω 中**有界**当且仅当 $\exists n \in \omega\, \forall m \in X\ (m \leqslant n)$.

引理 1.1 如果 $m \in \omega$, $f : m \to \omega$, 那么 $f[m]$ 是 ω 的一个有界子集.

证明 对 $m \in \omega$ 施归纳.

当 $m = 0$ 时, 结论自然成立.

设对于 $m \in \omega$, 如果 $f : m \to \omega$, 那么 $f[m]$ 是 ω 的一个有界子集.

现在设 $g : m+1 \to \omega$. 我们来证明：$g[m+1]$ 在 ω 中有界. 令

$$f = g\restriction_m : m \to \omega.$$

根据归纳假设, $f[m] \subset k \in \omega$ 对于足够大的 k 成立. 令 $n = \max(\{k, g(m)+1\})$. 那么

$$g[m+1] \subset n \in \omega.$$

□

定义 1.29 ($\in$-同构映射) 设 X 和 Y 是两个集合, $f : X \to Y$. 称 f 是 X 与 Y 的 $\in$-**同构映射**当且仅当 f 是一个双射并且

$$\forall a\, \forall b\, ((a \in X\ \wedge\ b \in X) \to (a \in b \leftrightarrow f(a) \in f(b))).$$

此种情形下将 f 记成 $f : (X, \in) \cong (Y, \in)$.

定理 1.11 (1) 如果 $X \subseteq n \in \omega$，那么存在满足下述两项要求的唯一的序对 (m_X, π_X)：

(i) $\pi_X : (X, \in) \to (m, \in)$ 是一个同构映射;

(ii) $\forall i \in X\ (\pi_X(i) = \pi_X[i \cap X] = \{\pi_X(j) \mid j \in i \cap X\})$.

(2) 如果 $X \subseteq \omega$ 是一个在 ω 中无界的子集, 那么存在唯一的从 X 到 ω 的 $\in$-同构映射 π_X 并且这个同构映射满足如下等式:

$$\forall k \in X\ \ (\pi_X(k) = \pi_X[k \cap X])\,.$$

称此同构映射 π_X 为无界子集 $X \subseteq \omega$ 的**雪崩映射**; 而称 π_X^{-1} 为 X 的**自然列表**.

证明 (1) 对 $n \in \omega$ 施归纳.

当 $n = 0$ 时, 若 $X \subseteq n$, 则 $X = \varnothing$.

现在假设命题 (1) 对于 $n \in \omega$ 成立. 设 $X \subseteq n + 1 = n \cup \{n\}$.

如果 $X \subseteq n$, 则由归纳假设我们得出关于 X 的结论.

现在设 $X = n \cap X \cup \{n\}$. 由于 $n \cap X \subseteq n$, 根据归纳假设, 得到唯一的一个满足要求 (i) 和 (ii) 的序对 $(m_{n\cap X}, \pi_{n\cap X})$:

$$\text{(i) } \pi_{n\cap X} : (n \cap X, \in) \cong (m_{n\cap X}, \in);\ \text{(ii) } \forall i \in n \cap X\ \ (\pi_{n\cap X}(i) = \pi_{n\cap X}[i \cap X]).$$

令 $\pi_X(n) = m_{n\cap X}$, 以及 $(\pi_X) \restriction_{n\cap X} = \pi_{n\cap X}$. 那么

$$\pi_X : X \to (m_{n\cap X} + 1)$$

是一个 $\in$-同构映射, 并且, $\pi_X(n) = \pi_X[n \cap X] = m_{n\cap X}$ 以及对于每一个 $i \in n \cap X$ 都有

$$\pi_X(i) = \pi_{n\cap X}(i) = \pi_{n\cap X}[i \cap (n \cap X)] = \pi_{n\cap X}[i \cap X] = \pi_X[i \cap X].$$

(2) 设 $X \subseteq \omega$ 是一个在 ω 中无界的子集. 对于每一个 $k \in X$, 令 (π_k, m_k) 为由 (1) 给出的唯一序对

$$(\pi_{k\cap X}, m_{k\cap X}).$$

那么,

$$X = \bigcup_{k\in X} k \cap X$$

以及 $\forall k \in X\ \forall n \in X\ \ (k < n \to (m_k < m_n \wedge \pi_k = (\pi_n) \restriction_{k\cap X}))$. 令

$$\pi_X = \bigcup_{k\in X} \pi_{k\cap X}.$$

那么, $\pi_X : X \to \omega$ 是一个 $\in$-嵌入映射: 设 $k \in X, n \in X$ 以及 $k \in n$. 取 $\ell \in (X - (n + 1))$. 那么

$$\pi_X(k) = \pi_{\ell\cap X}(k) \in \pi_{\ell\cap X}(n) = \pi_X(n).$$

欲证 π_X 是一个同构映射, 只需证明它是一个满射. 假设不然. 设 $m \in \omega$ 为不在 $\pi_X[X]$ 中的最小自然数. 由于

$$\forall k \in X\ (\pi_X(k) = \pi_X[k \cap X]),$$

如果 $\exists k \in X\,(m \leqslant \pi_X(k))$, 那么 $m \in \pi_X[X]$. 因此, 必有 $\pi_X[X] = m$. 由于 π_X 是 $(X, \in)$ 与 $(\pi_X[X], \in)$ 之间的同构, $\pi_X^{-1} : m \to X$ 是一个双射. 根据引理 1.1, X 就应当是 ω 的一个有界子集. 这是一个矛盾. □

总结一下: 到此为止, 我们引进了同一律、第一存在性、分解原理、幂集公理、配对公理、并集公理、无穷公理, 后面我们还将引进映像存在原理以及 $\in$-极小原理. 这些就组成集合论的 ZF 公理系统. 这里, Z 是 Zermelo 的姓氏的第一个字母; F 是 Fraenkel 的姓氏的第一个字母. 除了他们两人的一些奠基性工作外, Skolem 和 von Neumann 也都为集合论公理系统的建立做出了十分重要的贡献.

1.3.3 第一递归定义定理

定义 1.30 (有限序列) (1) 设 $n \in \omega$, A 为一个非空集合. A^n 中的任何一个元素都称为一个 A 上的长度为 n 的序列. A^ω 中的任何一个元素都称为一个 A 上的长度为 ω 的序列. 我们也将 A 同 A^1 等同起来. 同样地, 对于 $n > 1$, 我们也将 A^n 同 A 的 n 次笛卡尔乘幂等同起来, 即

$$\begin{aligned} A^n &= \{(a_1, \cdots, a_n) \mid a_1 \in A, \cdots, a_n \in A\} \\ &= \{(a_0, \cdots, a_{n-1}) \mid a_0 \in A, \cdots, a_{n-1} \in A\}. \end{aligned}$$

(2) 令 $A^{<\omega} = \bigcup\{A^n \mid n \in \omega\}$. $A^{<\omega}$ 中的元素则被称为 A 上的有限 (穷) 序列; 而 A^ω 中的元素则被称为 A 上的长度为 ω 的序列, 或 A 上的无穷序列.

(3) 设 $n \in \omega$, A 为一个非空集合. 令 $[A]^n = \{x \in \mathfrak{P}(A) \mid |x| = |n|\}$, 以及

$$[A]^{<\omega} = \{x \in \mathfrak{P}(A) \mid \exists n \in \omega\,(|x| = |n|)\}.$$

$[A]^{<\omega}$ 被称为 A 的所有有限子集的集合.

定义 1.31 (1) 当两个函数 f 和 g 满足如下条件时, 我们称它们是彼此和谐的 (无冲突的):

$$\forall x\,(x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) \to f(x) = g(x)).$$

(2) 对于一个由一些函数所组成的集合 F 而言, 当 F 中的任何两个函数都是彼此和谐的时, 我们称 F 为一个和谐函数系统.

命题 1.9 (1) 两个函数 f 和 g 是彼此和谐的当且仅当 $f \cup g$ 是一个函数.

(2) 设 F 为一个和谐函数系统. 令 $H = \bigcup F$. 那么

(a) H 是一个函数;

(b) $\mathrm{dom}(H) = \bigcup\{\mathrm{dom}(f) \mid f \in F\}$;

(c) $\forall f\,(f \in F \to f \subseteq H)$.

证明 (练习.) □

现在, 我们来回顾一下数学中常用的自然数集合上的递归定义. 数学中的这种递归定义是用来定义长度不超过 ω 的序列的.

例 1.9 (1) 我们如下定义自然数的加法运算 $+:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$:

对于 $m\in\mathbb{N}$, 依下述定义 $f_m:\{m\}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$:

$$f_m(m,0)=m,$$

$$f_m(m,n+1)=f_m(m,n)+1,$$

然后再令 $+=\bigcup\{f_m\mid m\in\mathbb{N}\}$.

(2) 我们如下定义自然数乘法运算 $\cdot:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$:

对 $m\in\mathbb{N}$, 依下述等式定义 $g_m:\{m\}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$:

$$g_m(m,0)=0,$$

$$g_m(m,n+1)=g_m(m,n)+m,$$

然后再令 $\cdot=\bigcup\{g_m\mid m\in\mathbb{N}\}$.

(3) 令 $2=1+1$. 定义:

(a) $2^0=1$;

(b) $2^{i+1}=2^i\cdot 2$.

(4) 我们也可以如下定义 $m!$:

$$f(0)=1,$$

$$f(n+1)=f(n)\cdot(n+1).$$

这些定义都依赖递归定义定理.

定理 1.12 (第一递归定义定理) 设 A 为一个非空集合, 并设 $a\in A$. 再设

$$g:A\times\omega\to A$$

为一个函数. 那么存在唯一的一个满足如下两个条件的无穷序列 $f:\omega\to A$:

(1) $f(0)=a$;

(2) $\forall n\ (n\in\omega\to f(n+1)=g(f(n),n))$.

证明 设 A 为一个非空集合, $a\in A$, 并且 $g:A\times\omega\to A$ 是一个事先所给定的函数.

唯一性. 设 f 和 h 都是满足条件 (1) 和 (2) 的两个函数, 欲证 $f=h$.

我们用归纳法来证, 对于所有的 $n\in\omega$ 都有 $f(n)=h(n)$.

由 (1) 有 $f(0)=a=h(0)$.

现在假定 $f(n) = h(n)$, 欲证 $f(n+1) = h(n+1)$. 由 (2), 有

$$f(n+1) = g(f(n), n) = g(h(n), n) = h(n+1).$$

于是, 由数学归纳法原理, $\forall n\ (n \in \omega \to f(n) = h(n))$. □

存在性. 我们先来证明两个引理.

引理 1.2 对于任意的 $m \in \omega$, 必存在满足如下两个条件的长度为 $m+1$ 的一个序列 $f_m : m+1 \to A$:

(a) $f_m(0) = a$,

(b) $\forall n\ (n \in m \to f_m(n+1) = g(f_m(n), n))$.

关于存在性引理的论证.

当 $m = 0$ 时, 令 $f_0 = \{(0, a)\}$. 两个条件 (a) 和 (b) 都得到满足. 现在假定有满足两个条件 (a) 和 (b) 的序列 $f_m : m+1 \to A$. 令

$$f_{m+1} = f = f_m \cup \{(m+1, g(f_m(m), m))\}.$$

那么这一个函数 f 就是一个满足条件 (a) 和 (b) 的序列.

引理 1.3 设 $m, n \in \omega$. 又设 f_m, f_n 是分别满足引理 1.2 中的条件 (a) 和 (b) 的长度为 $m+1$ 和 $n+1$ 的两个序列. 假定或者 $n \in m$ 或者 $n = m$, 那么对于任意一个 $i \in n+1$ 都必有 $f_m(i) = f_n(i)$.

关于唯一性引理的论证.

我们用关于 $i \in n+1$ 的归纳法.

$f_m(0) = f_n(0) = a$.

现在假定 $i \in n$ 而且 $f_m(i) = f_n(i)$. 那么

$$f_m(i+1) = g(f_m(i), i) = g(f_n(i), i) = f_n(i+1).$$

上述引理由此得证.

现在证明无穷序列的存在性.

令 F 为所有满足上述条件 (a) 和 (b) 的定义在某个 $m+1$ 之上的序列的集合. 也就是说, $t \in F$ 当且仅当 $t \subseteq \omega \times A$ 而且存在某一个 $m \in \omega$, $t : m+1 \to A$ 是一个满足条件 $t(0) = a$ 和 $t(i+1) = g(t(i), i)(i \in m)$ 的长度为 $m+1$ 的序列.

那么由引理 1.1 和引理 1.2 得知 F 是一个非空的和谐系统. 令 $f = \bigcup F$. 则 f 是一个函数, 而且

$$\mathrm{dom}(f) = \bigcup \{\mathrm{dom}(t) \mid t \in F\}.$$

由引理 1.1 得知对于任何一个 $m \in \omega$, 都有一个 A 上的长度为 $m+1$ 的序列 $t \in F$. 于是, $\mathrm{dom}(f) = \omega$ 而且 $\mathrm{rng}(f) \subseteq A$.

我们需要验证函数 f 满足定理 1.12 的两个要求 (1) 和 (2). 因为所有的 $t \in F$ 都满足 $t(0) = a$, 所以 $f(0) = a$. 现在假定 $f(n)$ 已经满足要求. 欲知 $f(n+1) = g(f(n), n)$. 取 $t \in F$ 为一个长度为 $(n+1)+1$ 的序列:

$$t : (n+1)+1 \to A.$$

那么, $f(n+1) = t(n+1)$ 而且 $f(n) = t(n)$. 由于 $t(n+1) = g(t(n), n)$,

$$f(n+1) = g(f(n), n).$$

□

推论 1.2 设 B 为一个非空集合. 又设 $g : B^{<\omega} \to B$. 则存在唯一的一个满足如下要求的序列 $f : \omega \to B$:

$$\forall n\ (n \in \omega \to f(n) = g(f \restriction n) = g(\langle f(0), \cdots, f(n-1)\rangle)).$$

这里我们约定 $f \restriction 0 = \langle\ \rangle = \varnothing$, 并且对于 $0 \in n \in \omega$, 有 $n = (n-1) \cup \{n-1\}$.

证明 考虑 $A = B^{<\omega}$, $a = \langle\ \rangle$, $G : A \times \omega \to A$ 是如下定义的一个函数: 如果 $t \in A$ 是一个长度为 n 的序列, 那么定义 $G(t, n) = t \cup \{\langle n, g(t)\rangle\}$; 如果 $(t, n) \in A \times \omega$ 不满足这样的性质, 那么定义 $G(t, n) = \langle\ \rangle$.

应用上面的递归定义定理, 我们得到唯一的一个满足如下要求的序列

$$F : \omega \to A:$$

(1) $F(0) = \langle\ \rangle$;

(2) $\forall n\ (n \in \omega \to F(n+1) = F(n) \cup \{\langle n, g(F(n))\rangle\})$.

于是, F 的值域是一个和谐的函数系统. 令 $f = \bigcup \mathrm{rng}(F)$, 那么 f 就是我们所要的无穷序列. □

推论 1.3 设 A 和 P 为两个非空集合. 又设 $a : P \to A$ 和 $g : P \times A \times \omega \to A$ 为两个函数, 那么存在唯一一个满足如下要求的函数 $f : P \times \omega \to A$:

(1) $\forall p\ (p \in P \to f(p, 0) = a(p))$;

(2) $\forall p\ \forall n\ ((n \in \omega \wedge p \in P) \to f(p, n+1) = g(p, f(p, n), n))$.

例 1.10 (1) 设 $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. 递归地, 令 $f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$, $f^1 = f$, $f^{n+1} = f \circ f^n$.

(2) $\mathbf{S}^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$, $\forall x \in \mathbb{N}\ (\mathbf{S}^1(x) = x \cup \{x\})$, $\mathbf{S}^{n+1} = \mathbf{S} \circ \mathbf{S}^n$.

作为递归定义定理的一个应用, 我们来证明康托尔-伯恩斯坦定理:

$$\text{如果 } |A| \leqslant |B| \leqslant |A|, \text{ 那么 } |A| = |B|.$$

引理 1.4 (三明治引理) 如果 $C \subseteq B \subseteq A$ 而且 $|C| = |A|$, 那么 $|A| = |B|$.

证明 令 $f : A \to C$ 为一个双射. 用递归定义, 我们定义两个无穷序列:

$$A_0, A_1, \cdots, A_n, \cdots$$

以及

$$B_0, B_1, \cdots, B_n, \cdots.$$

令 $A_0 = A$ 以及 $B_0 = B$. 对任意的 $n \in \omega$, 令

$$A_{n+1} = f[A_n], \ \ B_{n+1} = f[B_n].$$

具体而言, 令 $G : \mathfrak{P}(A) \times \omega \to \mathfrak{P}(A)$ 为由下述等式所确定的函数:

$$G(X, n) = f[X] = \{f(a) \mid a \in X\} \ (X \subseteq A; \ n \in \omega).$$

根据第一递归定义定理 (定理 1.12), 存在唯一的满足如下等式

$$g(0) = A; \ g(n+1) = G(g(n), n); \ \ h(0) = B; \ h(n+1) = G(h(n), n) \ (n \in \omega)$$

要求的

$$g : \omega \to \mathfrak{P}(A); \ h : \omega \to \mathfrak{P}(A).$$

由归纳法, 我们知道对于所有的 $n \in \omega$, 都有 $A_{n+1} \subseteq B_n \subseteq A_n$.

对于 $n \in \omega$, 令 $E_n = A_n - B_n$. 再令

$$E = \bigcup \{E_n \mid n \in \omega\}$$

以及 $D = A - E$.

注意到 $f[E] = E - E_0$ 以及 $B = f[E] \cup D$. (由归纳法: $f[E_n] = E_{n+1}$.)

现在我们可以如下定义从 A 到 B 的一个双射 g:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E, \\ x & x \in D. \end{cases}$$

于是, g 是一个单射而且 $g[A] = B$. □

定理 1.13 (康托尔–伯恩斯坦[10]) 如果 $|A| \leqslant |B|$ 而且 $|B| \leqslant |A|$, 那么 $|A| = |B|$.

证明 令 $f : A \to B$ 和 $g : B \to A$ 分别为两个单射. 那么 $g[f[A]] \subseteq g[B] \subseteq A$. 由于 $|A| = |g[f[A]]|$, 由前面的三明治引理 1.4, $|A| = |g[B]|$. 又由于 $|B| = |g[B]|$, 我们得到 $|A| = |B|$. □

10 Cantor–Bernstein.

自然数集合的序特征定理

我们已经知道自然数集合 $\mathbb{N}$ 在其典型序 $<$ 下具有最小数原理 (秩序原理) 以及最大数原理. 现在, 我们应用递归定义定理来证明这些性质是自然数序结构的典型特性: 任何一个线性序, 如果具有这几条性质, 那么它一定和自然数序同构.

定理 1.14 设 $(A, \prec)$ 是一个线性序, 而且满足下述三条要求:

(1) A 中无 $\prec$- 最大元, 即若 $a \in A$, 那么 A 中必有一个 $\prec$ 大于 a 的元素;

(2) 若 $X \subseteq A$ 非空, 那么 X 必有一个 $\prec$- 最小元素;

(3) 若 $X \subseteq A$ 非空, 而且 X 有 $\prec$ 上界, 那么 X 必有一个 $\prec$- 最大元素.

那么, $(A, \prec)$ 一定与 $(\mathbb{N}, <)$ 同构, 即一定存在一个从 A 到 $\mathbb{N}$ 的双射 h, 并且 h 满足如下要求: 对于任意的 $a \in A, b \in A$, 都有

$$a \prec b \iff h(a) < h(b).$$

证明 设 $(A, \prec)$ 满足条件 (1),(2) 及 (3), 是一个线性序. 令 $a = \min_{\prec}(A)$. 对 $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$, 令

$$g(x, n) = \min_{\prec}(\{y \in A \mid x \prec y\}).$$

根据递归定义定理, 得到唯一一个序列 $f : \mathbb{N} \to A$ 满足如下要求:

(a) $f(0) = a = A$ 中 $\prec$- 最小元;

(b) $f(n+1) = g(f(n), n) = A$ 中 $\prec$ 大于 $f(n)$ 的 $\prec$- 最小元.

这样, $f : \mathbb{N} \to A$ 是一个单调递增的序列: 如果 $m < n$, 那么 $f(m) \prec f(n)$; 反之, 亦然. 于是, f 是一个单射.

我们需要证明 f 还是一个满射.

假设不然. 令 $f[\mathbb{N}] = \{f(n) \in A \mid n \in \mathbb{N}\}$. 那么 $A - f[\mathbb{N}] \neq \varnothing$. 令 $p = \min_{\prec}(A - f[\mathbb{N}])$. 令 $B = \{q \in A \mid q \prec p\}$. 如果 B 是空集, 那么 $p = \min_{\prec}(A) = a = f(0) \in f[\mathbb{N}]$. 所以, B 不空, 而且 B 有上界 p. 由条件 (3), B 必有一最大元 $q \in B$, 此 $q \prec p$, 因而 $q \in f[\mathbb{N}]$. 令 $m \in \mathbb{N}$ 满足方程 $q = f(m)$. 由于 p 就是 A 中 $\prec$ 大于 q 的 $\prec$- 最小元, 依定义, 必有 $g(q, m) = p$, 从而 $p = f(m+1)$. 这就是矛盾.

这样我们就证明了 f 是一满射.

f 的逆映射 $h = f^{-1} : A \to \mathbb{N}$ 就是所要的映射. □

1.3.4 自然数算术运算

加法

定理 1.15 在自然数集合 ω 上存在满足下述递归定义式的唯一加法函数

$$+ : \omega \times \omega \to \omega:$$

对于任意的 $m \in \omega$,

$$+(m,0)=m;$$
$$+(m,n+1)=(+(m,n))\cup\{+(m,n)\}=\mathbf{S}(+(m,n)),\ n\in\omega.$$

证明 应用推论 1.3, 其中令 $A=P=\omega$, 以及 $\forall x\in\omega\,(a(x)=x)$ 和

$$\forall a,x,n\in\omega\ (g(p,x,n)=x+1).$$

□

按照传统, 依旧将 $+(m,n)$ 写成 $m+n$. 所以,

$$m+0=m;$$
$$m+(n+1)=(m+n)+1,\ n\in\omega.$$

定理 1.16 (1) $\forall m\in\mathbb{N}\,\forall n\in\mathbb{N}\,(m+n=n+m)$.
(2) $\forall m\in\mathbb{N}\,\forall n\in\mathbb{N}\,\forall k\in\mathbb{N}\,(m+(n+k)=(m+n)+k)$.
(3) $\forall m\in\mathbb{N}\,\forall n\in\mathbb{N}\,\forall k\in\mathbb{N}\,((m+n=m+k)\leftrightarrow n=k)$.
(4) $\forall m\in\mathbb{N}\,\forall n\in\mathbb{N}\,\forall k\in\mathbb{N}\,(m<n\leftrightarrow(m+k<n+k))$.

证明 (1) (交换律) 对于 $n\in\mathbb{N}$ 施归纳, 我们证明：$\forall m\,(n+m=m+n)$.
设 $n=0$. 对 m 施归纳, 我们证明：$0+m=m$.
当 $m=0$ 时, $0+0=0$. 设 $0+m=m$. 那么

$$0+(m+1)=(0+m)+1=m+1.$$

所以, $\forall m\,(0+m=m=m+0)$.

关于 n 的归纳假设：$\forall m\,(n+m=m+n)$.
现在来证明：$\forall m\,((n+1)+m=m+(n+1))$.
为此, 对 m 施归纳. 当 $m=0$ 时, 应用当 $n=0$ 时的结论, 有

$$(n+1)+0=0+(n+1).$$

假设 $(n+1)+m=m+(n+1)$. 我们有

$$\begin{aligned}(n+1)+(m+1)&=((n+1)+m)+1 &&\text{定义}\\ &=(m+(n+1))+1 &&\text{假设}\\ &=((m+n)+1)+1 &&\text{定义}\\ &=((n+m)+1)+1 &&\text{归纳假设}\\ &=(n+(m+1))+1 &&\text{定义}\\ &=((m+1)+n)+1 &&\text{归纳假设}\\ &=(m+1)+(n+1) &&\text{定义.}\end{aligned}$$

(2) (结合律) 对 $k \in \mathbb{N}$ 施归纳. 当 $k = 0, 1$ 时, 应用定义.

归纳假设: $m + (n + k) = (m + n) + k$.

$$\begin{aligned} m + (n + (k+1)) &= m + ((n+k)+1) && \text{定义} \\ &= (m + (n+k)) + 1 && \text{定义} \\ &= ((m+n)+k)+1 && \text{归纳假设} \\ &= (m+n)+(k+1) && \text{定义.} \end{aligned}$$

(3) 和 (4) 之证明留作练习. □

定理 1.17 设 $n, m \in \mathbb{N}$. 那么

(1) $n + m = n \cup \{i \in \mathbb{N} \mid n \leqslant i < (n+m)\}$;

(2) m 是 $X = \{i \in \mathbb{N} \mid n \leqslant i < (n+m)\}$ 的雪崩像, 即 $m = \pi_X[X]$;

(3) 如果 A 和 B 是两个集合, 并且 $|A| = |n|$, $|B| = |m|$, $A \cap B = \varnothing$, 那么 $|A \cup B| = |n+m|$;

(4) $\forall m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \, (m \leqslant n \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \, (n = m + k \wedge \text{此 } k \text{ 唯一}))$.

证明 任意固定 $n \in \mathbb{N}$. 对 $m \in \mathbb{N}$ 施归纳, 我们先来证明 (1) 和 (2).

当 $m = 0$ 时, 结论自然成立.

假设对于 m 所论命题成立. 根据定义,

$$\begin{aligned} n + (m+1) &= (n+m)+1 \\ &= (n+m) \cup \{(n+m)\} \\ &= (n \cup \{i \in \mathbb{N} \mid n \leqslant i < (n+m)\}) \cup \{(n+m)\} \\ &= n \cup \{i \in \mathbb{N} \mid n \leqslant i < (n+(m+1))\}. \end{aligned}$$

令 $X = \{i \in \mathbb{N} \mid n \leqslant i \leqslant (n+m)\} = \{i \in \mathbb{N} \mid n \leqslant i < (n+m)\} \cup \{(n+m)\}$. 令

$$Y = \{i \in \mathbb{N} \mid n \leqslant i < (n+m)\} = (n+m) \cap X.$$

那么,

$$\begin{aligned} &\pi_Y[Y] = m \wedge (\pi_X) \restriction_Y = \pi_Y \\ &\wedge \pi_X(n+m) = \pi_X[(n+m) \cap X] = m \\ &\wedge m + 1 = \pi_X[X]. \end{aligned}$$

(3) 设 A 和 B 是两个集合, 并且 $|A| = |n|$, $|B| = |m|$, $A \cap B = \varnothing$. 令

$$f : n \to A \ \wedge \ g : m \to B$$

为两个双射. 令 $X = \{i \in \omega \mid n \leqslant i < (n+m)\}$ 以及 $\pi_X : X \to m$ 为 X 的雪崩映射. 对于 $i \in (n+m)$, 定义

$$h(i) = \begin{cases} f(i) & \text{如果 } i \in n, \\ g(\pi_X(i)) & \text{如果 } i \in X. \end{cases}$$

那么, $h : (n+m) \to (A \cup B)$ 是一个双射.

(4) 之证明留作练习. □

乘法

定理 1.18 在自然数集合 ω 上存在满足下述递归定义式的唯一乘法函数

$$\cdot : \omega \times \omega \to \omega:$$

对于任意的 $m \in \omega$,

$$\cdot(m, 0) = 0;$$
$$\cdot(m, n+1) = (\cdot(m, n)) + m, \ n \in \omega.$$

证明 应用推论 1.3, 其中令 $A = P = \omega$, 以及 $\forall x \in \omega\,(a(x) = x)$ 和

$$\forall a, x, n \in \omega\ (g(p, x, n) = x + p).$$ □

按照传统, 依旧将 $\cdot(m, n)$ 写成 $m \cdot n$. 所以,

$$m \cdot 0 = 0;$$
$$m \cdot (n+1) = (m \cdot n) + m, \ n \in \omega.$$

定理 1.19 (1) $\forall m \in \mathbb{N}\,(1 \cdot m = m \cdot 1 = m)$.

(2) $\forall m \in \mathbb{N}\,\forall n \in \mathbb{N}\,\forall k \in \mathbb{N}\ (m \cdot (n+k) = m \cdot n + m \cdot k)$.

(3) $\forall m \in \mathbb{N}\,\forall n \in \mathbb{N}\,\forall k \in \mathbb{N}\ ((n+k) \cdot m = n \cdot m + k \cdot m)$.

(4) $\forall m \in \mathbb{N}\,\forall n \in \mathbb{N}\ (m \cdot n = n \cdot m)$.

(5) $\forall m \in \mathbb{N}\,\forall n \in \mathbb{N}\,\forall k \in \mathbb{N}\ (m \cdot (n \cdot k) = (m \cdot n) \cdot k)$.

(6) $\forall m \in \mathbb{N}\,\forall n \in \mathbb{N}\,\forall k \in \mathbb{N}\ (k > 0 \to (m < n \leftrightarrow (m \cdot k < n \cdot k)))$.

证明 (1) $m \cdot 1 = m \cdot (0+1) = (m \cdot 0) + m = 0 + m = m$.

用关于 m 的归纳法, 我们来证明：$1 \cdot m = m$.

当 $m = 0$ 时, $1 \cdot 0 = 0$. 设 $1 \cdot m = m$. 那么,

$$1 \cdot (m+1) = (1 \cdot m) + 1 = m + 1.$$

(2) (左分配律) 对 k 施归纳. $m \cdot (n+0) = m \cdot n = m \cdot n + 0 = m \cdot n + m \cdot 0$.

设 $m \cdot (n+k) = m \cdot n + m \cdot k$. 那么,

$$\begin{aligned}
m \cdot (n + (k+1)) &= m \cdot ((n+k) + 1) && \text{加法结合律} \\
&= (m \cdot (n+k)) + m && \text{定义} \\
&= (m \cdot n + m \cdot k) + m && \text{归纳假设} \\
&= m \cdot n + (m \cdot k + m) && \text{加法结合律} \\
&= m \cdot n + m \cdot (k+1) && \text{定义.}
\end{aligned}$$

(3) (右分配律) 对 m 施归纳. $(n+k)\cdot 0 = 0 = 0+0 = n\cdot 0 + k\cdot 0$.
设 $(n+k)\cdot m = n\cdot m + k\cdot m$. 那么

$$\begin{aligned}(n+k)\cdot(m+1) &= (n+k)\cdot m + (n+k) && \text{定义}\\ &= (n\cdot m + k\cdot m) + (n+k) && \text{归纳假设}\\ &= (n\cdot m + n) + (k\cdot m + k) && \text{加法交换律、结合律}\\ &= n\cdot(m+1) + k\cdot(m+1) && \text{定义.}\end{aligned}$$

(4) (交换律) 首先, 对 m 施归纳, 我们证明：$0\cdot m = 0$.
$0\cdot 0 = 0$. 设 $0\cdot m = 0$. 那么 $0\cdot(m+1) = (0\cdot m) + 0 = 0 + 0 = 0$.
对于 $n \in \mathbb{N}$ 施归纳, 我们证明：$\forall m\ (m\cdot n = n\cdot m)$.
$m\cdot 0 = 0 = 0\cdot m$.
设 $m\cdot n = n\cdot m$. 那么

$$\begin{aligned}m\cdot(n+1) &= m\cdot n + m && \text{定义}\\ &= n\cdot m + m && \text{归纳假设}\\ &= n\cdot m + 1\cdot m && \text{左单位元}\\ &= (n+1)\cdot m && \text{右分配律.}\end{aligned}$$

(5) (结合律) 对 $k \in \mathbb{N}$ 施归纳. $m\cdot(n\cdot 0) = m\cdot 0 = 0 = (m\cdot n)\cdot 0$.
归纳假设：$m\cdot(n\cdot k) = (m\cdot n)\cdot k$.

$$\begin{aligned}m\cdot(n\cdot(k+1)) &= m\cdot((n\cdot k)+n) && \text{定义}\\ &= (m\cdot(n\cdot k)) + m\cdot n && \text{左分配律}\\ &= ((m\cdot n)\cdot k) + m\cdot n && \text{归纳假设}\\ &= (m\cdot n)\cdot(k+1) && \text{定义.}\end{aligned}$$

(6) 之证明留作练习. □

定理 1.20 设 $n, m \in \mathbb{N}$. 那么 $|m\cdot n| = |m\times n|$.

证明 对 $n \in \mathbb{N}$ 施归纳.
当 $n = 0$ 或 1 时, 等式成立.
设 $|m\cdot n| = |m\times n|$. 令 $X = \{(a,n) \mid a \in m\}$, 那么

$$|X| = |m| \ \wedge\ (m\times n)\cap X = \varnothing \ \wedge\ m\times(n+1) = (m\times n)\cup X.$$

根据归纳假设, $|m\cdot n| = |m\times n|$. 于是,

$$|m\times(n+1)| = |(m\times n)\cup X| = |m\cdot n + m| = |m\cdot(n+1)|.$$ □

指数

定理 1.21 在自然数集合 ω 上存在满足下述递归定义式的唯一指数函数

$$\exp : \omega \times \omega \to \omega:$$

对于任意的 $m \in \omega$,

$$\exp(m, 0) = 1;$$
$$\exp(m, n+1) = (\exp(m, n)) \cdot m,\ n \in \omega.$$

证明 应用推论 1.3, 其中令 $A = P = \omega$, 以及 $\forall x \in \omega\,(a(x) = x)$ 和

$$\forall a, x, n \in \omega\ (g(p, x, n) = x \cdot p).$$ □

按照传统, 依旧将 $\exp(m, n)$ 写成 m^n. 所以,

$$m^0 = 1;$$
$$m^{n+1} = m^n \cdot m,\ n \in \omega.$$

于是, $0^0 = 1$; $0^{n+1} = 0$.

定理 1.22 (1) $\forall m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N}\ (m^n \cdot m^k = m^{n+k})$.

(2) $\forall m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N}\ ((m^n)^k = m^{n \cdot k})$.

(3) 如果 $m \in (\mathbb{N} - \{0\})$, $n \in \mathbb{N}$, $|X| = |m|$, $|Y| = |n|$, 那么 $|m^n| = |X^Y|$.

证明 在 (1) 和 (2) 的证明中, 对 k 施归纳. 留作练习.

(3) 固定 $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$. 对 $n \in \mathbb{N}$ 施归纳. 当 $n = 0$ 时, $X^{\varnothing} = \{\varnothing\}$.

归纳假设: 对于 $n \in \mathbb{N}$, $|X| = |m|$, $|Y| = |n|$, 都有 $|m^n| = |X^Y|$.

设 $|X| = |m|$, $|Y_1| = |n|$, 以及 $a \notin Y_1$, $Y = Y_1 \cup \{a\}$, 从而 $|Y| = |n+1|$. 那么,

$$\begin{aligned}
|m^{n+1}| &= |m^n \cdot m| && \text{定义} \\
&= |m^n \times m| && \text{乘法定理 1.20} \\
&= |X^{Y_1} \times \{(a, b) \mid b \in X\}| && \text{归纳假设} \\
&= |\{(f, (a, b)) \mid f \in X^{Y_1} \wedge b \in X\}| \\
&= |X^Y|.
\end{aligned}$$ □

阶乘

定理 1.23 在自然数集合 $\mathbb{N}$ 上存在满足下述要求的唯一阶乘函数: $x \mapsto x!$:

$0! = 1$;

$(n+1)! = (n+1) \cdot (n!)$.

证明 令 $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 为 $g(m, n) = m \cdot (n+1)$ 以及 $a = 1$. 应用第一递归定理, 得到满足下述要求的唯一函数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$f(0) = 1$;

$f(n+1) = g(f(n), n)$. □

1.3.5 有限与无限

定义 1.32 我们说一个集合 X 是一个**有限或者有穷集合**当且仅当 X 与某一个自然数等势.

我们说一个集合 X 是无限的或者无穷的当且仅当它不是有限的.

我们说一个集合 X 是一个**可数无限集合**当且仅当 X 与 ω 等势.

我们说一个集合 X 是**可数的**当且仅当它或者是有限的或者是可数无限的.

我们说一个集合 X 是**不可数的**当且仅当 X 既非有限也非无穷可数.

例 1.11 每一个 $n \in \omega$ 都是有限集合; ω 是一可数无穷集合; $\mathfrak{P}(\omega)$ 是一不可数集合.

例 1.12 (Galileo) 令 $A = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$, 那么 A 是一个可数无穷集合[11].

证明 映射 $f(n) = n^2$ 是从 $\mathbb{N}$ 到 A 的一个双射.

自然数算术性质保证 f 是一个单射: 如果 $n < m$, 那么 $m = n + k$ 且 $k > 0$. 于是当 $n < m$ 时, $(n+k)^2 = n^2 + 2nk + k^2 > n^2$, 从而, $f(n) < f(m)$.

A 的定义保证 f 是一个满射. □

例 1.13 设 $m \geqslant 2$ 为一个自然数. 令 $m\mathbb{N} = \{m \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\}$. 那么 $|m\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.

定理 1.24 (1) 如果 X 是一个有限集合, 那么 $\mathfrak{P}(X)$ 也是有限集合.

(2) 如果 X 是一个有限集合, Y 也是一个有限集合, 那么 $X \cup Y$ 也是有限集合.

(3) 如果 X 是一个有限集合, 而且它的每一个元素也是有限集合, 那么 $\bigcup X$ 是有限集合.

(4) 如果 X 是一个有限集合, $Y \subseteq X$, 那么 Y 是一个有限集合.

(5) 如果 X 是一个有限集合, f 是定义在 X 上的一个函数, 那么 $\mathrm{rng}(f)$ 也是有限的.

(6) 如果 X 和 Y 是两个非空有限集合, 那么 $X \times Y$ 也是有限集合.

(7) 如果 X 和 Y 是两个非空有限集合, 那么 X^Y 也是有限集合.

证明 (练习.) □

定义 1.33 ($\omega \times \omega$ 之典型序) 对于 $(a, b), (c, d) \in \omega \times \omega$, 令

$$\begin{aligned}(a,b) < (c,d) \leftrightarrow & [(\max\{a,b\} < \max\{c,d\}) \vee \\ & (\max\{a,b\} = \max\{c,d\} \wedge a < c) \vee \\ & (\max\{a,b\} = \max\{c,d\} \wedge a = c \wedge b < d)].\end{aligned}$$

关于序数乘积空间典型序的几何解释 任意给定一个自然数的有序对 (a, b),

11 Galileo 第一个意识到自然数中所有的平方数与自然数整体之间存在一一对应. 但是, Galileo 并没有像 Cantor 那样将 “一一对应” 作为一种度量和区分, 反倒认为在无限的情形下谈论多与少会是一件不合时宜的事情.

考虑这一点所在的由 $k = \max\{a, b\}$ 所唯一确定的正方块的上边界

$$\{(m, n) \mid m < k\}$$

和右边界

$$\{(k, n) \mid n \leqslant k\},$$

当一个自然数的有序对 (x, y) 的 $\max\{x, y\} < k$ 时, 这一点 (x, y) 就落在这个正方块的内部 (一个内点); 当 $\max\{x, y\} > k$ 时, 这一点 (x, y) 就落在这个正方块的外部 (一个外点); 在 $\max\{x, y\} = k$ 时, 这一点就落在这个正方块的两条边界上 (一个边界点). 上述典型序实际上就是规定：这个正方块的两条边界上的任意一点都大于这个正方块的任意一个内点, 小于这个正方块的任意一个外点; 这个正方块的上边界的任意一点都小于右边界的任意一点; 而上边界上的点则按照从左到右排出从小到大的顺序, 右边界上的点则按照自下而上排出从小到大的顺序.

所以, 归纳起来：内点小于边界点, 边界点小于外点, 上边界点小于右边界点, 上边界点中的左边的点小于右边的点, 右边界点中下面的小于上面的, 而且传递性总是自然而然的. 这就是乘积空间 $\omega \times \omega$ 上的典型序.

定理 1.25 (1) 定义 1.33 所给出的 $\omega \times \omega$ 上的关系是 $\omega \times \omega$ 上的一个线性序.

(2) 如果 $X \subset \omega \times \omega$ 是一个非空集合, 那么 X 中含有一个 $<$- 最小元.

(3) 对于 $(m, n) \in \omega \times \omega$, 集合

$$\{(a, b) \in \omega \times \omega \mid (a, b) < (m, n)\}$$

是一个有限集合.

(4) 对于 $(m, n) \in \omega \times \omega$, 令 $g(m, n) = k$ 当且仅当

$$|k| = |\{(a, b) \in \omega \times \omega \mid (a, b) < (m, n)\}|.$$

那么, $g : \omega \times \omega \to \omega$ 是一个双射.

证明 (2) 设 $X \subset \omega \times \omega$ 为一个非空集合. 令

$$m = \min(\{n \in \omega \mid ((n+1) \times (n+1)) \cap X \neq \varnothing\}).$$

由于 $\omega \times \omega = \bigcup\{(n+1) \times (n+1) \mid n \in \omega\}$, m 的定义毫无歧义.

如果 $\exists n \in m\ (n, m) \in X$, 那么, 令 $i = \min(\{n \in m \mid (n, m) \in X\})$, (i, m) 就是 X 中的最小元; 否则, 令 $i = \min(\{n \in (m+1) \mid (m, n) \in X\})$, (m, i) 就是 X 中的最小元.

(3) 由归纳法, $(n+1) \times (n+1)$ 是一个有限集合.

当 $n = 0$ 时, 所论乘积中恰有一个元素.

归纳假设: $(n+1)\times(n+1)$ 是一个有限集合. 考虑

$$((n+1)+1)\times((n+1)+1).$$

$$\begin{aligned}&((n+1)+1)\times((n+1)+1)\\=&((n\cup\{n\})\cup\{(n\cup\{n\})\})\times((n\cup\{n\})\cup\{(n\cup\{n\})\})\\=&(n\cup\{n\})\times(n\cup\{n\})\cup(n\cup\{n\})\times\{(n\cup\{n\})\}\\&\cup\{(n\cup\{n\})\}\times(n\cup\{n\})\cup\{((n\cup\{n\}),(n\cup\{n\}))\}.\end{aligned}$$ □

定义 1.34 (字典序) 对于 $(a,b),(c,d)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, 定义

$$(a,b)\prec(c,d)\iff(a<c\vee(a=c\wedge b<d)).$$

那么, $\prec$ 是 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 上的一个线性序, 称之为**字典序**.

定义 1.35 (单项式字典序) 对于 $(a,b),(c,d)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, 定义

$$(a,b)\ll(c,d)\iff(a+b<c+d\vee(a+b=c+d\wedge a<c)).$$

那么, $\ll$ 是 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 上的一个线性序, 称之为**单项式字典序**.

命题 1.10 $|\omega\times\omega|=|\omega|$.

证明 (1) 考虑映射由下述计算表达式所给出的 $h:\omega\times\omega\to\omega$:

$$h(n,m)=\frac{(n+m)(n+m+1)}{2}+n.$$

此 h 就是一个双射.

(2) 下述计算等式也定义了一个从 $\omega\times\omega$ 到 ω 的双射 J:

$$J(m,n)=2^m(2n+1)-1.$$

(3) 如下计算公式也定义了一个 $\omega\times\omega$ 到 ω 的双射 G:

$$G(m,n)=\begin{cases}n^2+m & \text{如果 } m<n,\\ m^2+m+n & \text{如果 } m\geqslant n.\end{cases}$$ □

命题 1.11 (1) $|\omega^{n+2}|=|\omega|\ (n\in\omega)$.

(2) $|\omega^{<\omega}|=|\omega|$.

(3) $|[\omega]^{<\omega}|=|\omega|$.

证明 (1) 应用命题 1.10 中的配对映射, 以及归纳法.

(2) 应用下述等式:

$$\omega^{<\omega}=\{\varnothing\}\cup\bigcup\{\omega^{n+1}\mid n\in\omega\},$$

以及 (1) 和命题 1.10.

(3) 下述计算公式定义了一个从 $[\omega]^{<\omega}$ 到 ω 的双射:

$$f(a)=\begin{cases}0 & a=\varnothing,\\ \sum_{i\in a}2^i & a\neq\varnothing.\end{cases}$$

□

定理 1.26 *如果 A 和 B 是两个可数集合, 那么 $A\cup B$ 和 $A\times B$ 也是可数集合.*

定理 1.27 *一个集合 X 是无穷的当且仅当 $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))$ 包含一个可数无限子集合.*

证明 我们知道当一个集合 X 是有限的时候, $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))$ 也是有限的, 所以它的任何一个子集合也是有限的.

现在假定 X 是无限集合. 设 n 为一个自然数. 我们定义

$$f(n)=[X]^n=\{b\in\mathfrak{P}(X)\mid |b|=|n|\}.$$

由于 X 是一个无限子集, 由归纳法我们得到对于任何一个 $n\in\omega$, $f(n)\neq\varnothing$.

我们也知道当 $n<m<\omega$ 时, $|n|<|m|$, 因此 $f(n)\cap f(m)=\varnothing$, 所以 f 是一个单射. $\mathrm{rng}(f)\subseteq\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))$. □

定理 1.28 (1) $|2^\omega|=|2^{\omega\times\omega}|=|2^\omega\times 2^\omega|$.

(2) $|\mathbb{N}^\mathbb{N}|=|\mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}|=|\mathbb{N}^\mathbb{N}\times\mathbb{N}^\mathbb{N}|$.

(3) $|(\omega^\omega)^\omega|=|\omega^\omega|$.

证明 (1) 令 $\pi:\omega\times\omega\to\omega$ 为一个双射. 如下定义 $H:2^{\omega\times\omega}\to 2^\omega$:

对于任意的 $(m,n)\in\omega\times\omega$, 令 $H(f)(\pi(m,n))=f(m,n)$.

那么, H 是一个双射. 如下定义 $G:2^\omega\times 2^\omega\to 2^\omega$:

对于任意的 $n\in\omega$, 令 $G(f,g)(2n)=f(n)$ 以及 $G(f,g)(2n+1)=g(n)$.

那么, G 是一个双射. 人们通常将 $G(f,g)$ 记成 $f*g$.

(3) 依如下等式定义函数 $F:(\omega^\omega)^\omega\to\omega^\omega$:

$$F(\langle f_n\mid n\in\omega\rangle)(k)=f_{(k)_0}((k)_1),\quad k\in\omega,$$

其中, $\omega\ni k\mapsto((k)_0,(k)_1)\in\omega\times\omega$ 是从 ω 到 $\omega\times\omega$ 的一个双射. □

命题 1.12 (1) *如果 $n\in\mathbb{N}$, 那么 $|\mathbb{N}-n|=|\mathbb{N}|$.*

(2) *如果 $X\subset\mathbb{N}$ 是一个有限集合, 那么 $|\mathbb{N}-X|=|\mathbb{N}|$.*

(3) *如果 $X\subseteq\mathbb{N}$ 是一个在 $\mathbb{N}$ 中的无界子集, 那么 $|X|=|\mathbb{N}|$.*

证明 在前面递归定义的例子中, 我们定义了从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的函数的序列:

$$\mathbf{S}^0(x)=x;\ \mathbf{S}^1(x)=x\cup\{x\};\ \mathbf{S}^{n+1}(x)=\mathbf{S}(\mathbf{S}^n(x)).$$

(1) 固定 $n \in \mathbb{N}$. 对于 $x \in \mathbb{N}$, 定义 $f_n(x) = \mathbf{S}^n(x)$. 那么, $f_n : \mathbb{N} \to (\mathbb{N} - n)$ 是一个双射.

(2) 设 $X \subset \mathbb{N}$ 为一个有限集合. 令 $m \in \mathbb{N}$ 满足 $|m| = |X|$. 那么,

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} - m| = |\mathbb{N} - X|.$$

欲见 $|\mathbb{N} - m| = |\mathbb{N} - X|$, 令 $k = \max(X)$. 令 $\ell = |(\mathbf{S}(k) - X)|$. 那么

$$\mathbf{S}^\ell(m) = \mathbf{S}(k).$$

从而,

$$\mathbb{N} - X = (\mathbb{N} - \mathbf{S}(k)) \cup (\mathbf{S}(k) - X); \quad \mathbb{N} - m = (\mathbb{N} - \mathbf{S}(k)) \cup (\mathbf{S}(k) - m)$$

以及 $|\mathbf{S}(k) - m| = |\mathbf{S}(k) - X|$.

还可以应用上面的康托尔–伯恩斯坦定理来证明：令 $k = \max(X)$. 因为

$$(\mathbb{N} - \mathbf{S}(k)) \subset (\mathbb{N} - X) \subset \mathbb{N},$$

所以

$$|\mathbb{N}| = |(\mathbb{N} - \mathbf{S}(k))| \leqslant |\mathbb{N} - X| \leqslant |\mathbb{N}|.$$

(3) 递归地定义一个从 $\mathbb{N}$ 到 X 的单射：

$$f(0) = \min(X); \quad f(n+1) = \min(X - (\mathbf{S}(f(n)))).$$

依归纳法, $\forall n \in \mathbb{N} \forall i \leqslant n\, f(i) < f(n+1)$. 所以, $|\mathbb{N}| \leqslant |X| \leqslant |\mathbb{N}|$. □

定理 1.29 $|2^\omega| = |\omega^\omega|$.

证明 因为 $2^\omega \subseteq \omega^\omega \subseteq \mathfrak{P}(\omega \times \omega)$, 所以

$$|\omega^\omega| \leqslant |\mathfrak{P}(\omega \times \omega)| = |\mathfrak{P}(\omega)| = |2^\omega| \leqslant |\omega^\omega|.$$ □

定理 1.30 (1) 如果 $A \subseteq 2^\omega$ 是一个可数集, 那么 $|2^\omega - A| = |2^\omega|$.

(2) 如果 $A \subseteq \omega^\omega$ 是一个可数集, 那么 $|\omega^\omega - A| = |\omega^\omega|$.

证明 只需证明如果 $A \subseteq 2^\omega \times 2^\omega$ 是一个可数集合, 那么 $|2^\omega \times 2^\omega - A| = |2^\omega|$. 因为 $A \subset 2^\omega \times 2^\omega$ 是一可数集合, 下述集合 B 可数：

$$B = \{a \in 2^\omega \mid \exists b \in 2^\omega\ ((a, b) \in A)\}.$$

由于 2^ω 不可数, $2^\omega - B \neq \varnothing$. 令 $c \in (2^\omega - B)$. 那么

$$\{c\} \times 2^\omega \cap A = \varnothing.$$

因此, $|2^\omega| = |\{c\} \times 2^\omega| \leqslant |(2^\omega \times 2^\omega) - A| \leqslant |2^\omega \times 2^\omega| = |2^\omega|$. □

问题 1.1 我们知道, 当一个集合包含一个可数无限子集合时它一定是一个无限集合, 是不是任何一个无限集合一定包含一个可数无限子集合呢?

1.4 整数集与有理数集

在这一节里, 我们引进两个新的无穷可数集合: 我们所熟悉的整数集合与有理数集合, 并定义它们上面的算术运算以及自然的线性序.

1.4.1 整数集合

在 1.3 节所引进的自然数集合 $\mathbb{N}$ 以及自然数算数结构 $(\mathbb{N}, 0, S, +, \cdot, <)$ 的基础之上, 我们来定义**整数**集合 $\mathbb{Z}$ 以及**整数**结构 $(\mathbb{Z}, 0, 1, +, \cdot, <)$.

从自然数到整数的跨越根本上就是要解决 "差" 的问题. 解决这个问题的最直接的方式就是在自然数平面上引进自然的等价关系. 将每一个等价类当成其中的自然数有序对的 "差". 这样的商结构固然可以作为整数结构, 但是每一个等价类都是一个可数无穷集合. 用一个无穷集合来表示一个直观上有限的整数可能让人以为不怎么妥帖. 好在这些等差的等价类中有非常典型的代表元可以选取. 于是, 下述整数的定义便是自然而然的.

定义 1.36 (1) 整数集合 $\mathbb{Z}$ 定义如下:

$$\mathbb{Z}^- = \{(1, (m, 1)) \mid 0 < m \in \mathbb{N}\}; \quad \mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z}^-.$$

称 $\mathbb{N}$ 中的元素 (自然数) 为**非负整数**; 称 $\mathbb{Z}^-$ 中的元素为**负整数**.

(2) 整数的绝对值定义如下: 对于 $x \in \mathbb{Z}$,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{如果 } x \in \mathbb{N}, \\ ((x)_1)_0 & \text{如果 } x \in \mathbb{Z}^-. \end{cases}$$

称非负整数 $|x|$ 为整数 x 的**绝对值**.

(3) 整数之间的序 $<$ 定义如下: 对于 $x, y \in \mathbb{Z}$,

(a) 如果 $\{x, y\} \subset \mathbb{N}$, 那么 $x < y \leftrightarrow x \in y$;

(b) 如果 $\{x, y\} \subset \mathbb{Z}^-$, 那么 $x < y \leftrightarrow |y| \in |x|$;

(c) 如果 $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{Z}^-$, 那么 $y < x$.

(4) 整数之间的加法 $+$ 定义如下:

(a) 如果 $(z, x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, 那么 $z = x + y \leftrightarrow z = x +_{\mathbb{N}} y$;

(b) 如果 $(z, x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^- \times \mathbb{Z}^-$, 那么 $z = x + y \leftrightarrow (z \in \mathbb{Z}^- \wedge |z| = |x| +_{\mathbb{N}} |y|)$;

(c) 如果 $z \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{Z}^-$, 那么

$$z = x + y \leftrightarrow \begin{pmatrix} [(|y| \leqslant x) \wedge z \in \mathbb{N} \wedge (x = |y| +_{\mathbb{N}} z)] \\ \vee [x < |y| \wedge z \in \mathbb{Z}^- \wedge (|z| +_{\mathbb{N}} x = |y|)] \end{pmatrix};$$

(d) 如果 $z \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{Z}^-$, $y \in \mathbb{N}$, 那么

$$z = x + y \leftrightarrow \left(\begin{array}{c} [|x| \leqslant y \wedge z \in \mathbb{N} \wedge (y = |x| +_{\mathbb{N}} z)] \\ \vee [y < |x| \wedge z \in \mathbb{Z}^- \wedge (|z| +_{\mathbb{N}} y = |x|)] \end{array} \right).$$

(5) 整数之间的乘法 $\cdot$ 定义如下:

(a) 如果 $(z, x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, 那么 $z = x \cdot y \leftrightarrow z = x \cdot_{\mathbb{N}} y$;

(b) 如果 $(z, x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^- \times \mathbb{Z}^-$, 那么 $z = x \cdot y \leftrightarrow z = |x| \cdot_{\mathbb{N}} |y|$;

(c) 如果 $z \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{Z}^-$, 那么

$$z = x \cdot y \leftrightarrow (z \in \mathbb{Z}^- \wedge (|z| = x \cdot_{\mathbb{N}} |y|));$$

(d) 如果 $z \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{Z}^-$, $y \in \mathbb{N}$, 那么

$$z = x \cdot y \leftrightarrow (z \in \mathbb{Z}^- \wedge (|z| = |x| \cdot_{\mathbb{N}} y)).$$

定理 1.31　(1) 整数序 $<$ 是 $\mathbb{Z}$ 上的一个线性序.

(2) 整数结构 $(\mathbb{Z}, 0, 1, +, \cdot)$ 是一个有单位元的交换环:

(a) 加法交换律, $\forall x \in \mathbb{Z} \forall y \in \mathbb{Z}(x + y = y + x)$;

(b) 加法结合律, $\forall x \in \mathbb{Z} \forall y \in \mathbb{Z} \forall z \in \mathbb{Z}((x + y) + z = x + (y + z))$;

(c) 加法可逆性, $\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z}((x + 0 = x) \wedge (x + y = 0))$;

(d) 乘法交换律, $\forall x \in \mathbb{Z} \forall y \in \mathbb{Z}(x \cdot y = y \cdot x)$;

(e) 乘法结合律, $\forall x \in \mathbb{Z} \forall y \in \mathbb{Z} \forall z \in \mathbb{Z}((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$;

(f) 乘法单位元, $\forall x \in \mathbb{Z}(x \cdot a = x)$;

(g) 乘法分配律, $\forall x \in \mathbb{Z} \forall y \in \mathbb{Z} \forall z \in \mathbb{Z}(x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$.

(3) 加法序适配: 如果 $x < y$, 那么 $z + x < z + y$.

(4) 乘法序适配:

(a) 如果 $x < y$ 以及 $0 < z$, 那么 $z \cdot x < z \cdot y$;

(b) 如果 $x < y$ 以及 $z < 0$, 那么 $z \cdot x > z \cdot y$.

(5) 自然数结构 $(\mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot, <)$ 是整数结构 $(\mathbb{Z}, 0, 1, +, \cdot, <)$ 的子结构.

证明　(练习.) □

如下定义整数的减法运算:

定义 1.37　对于整数 x, y, z, 定义

$$z = x - y \leftrightarrow x = y + z.$$

算术基本定理

为了在用集合表示有理数时保持直觉上 (或者元数学意义上) 有理数的有限特性, 我们需要在集合论内部引入自然数互素的概念. 为此, 我们先来建立非常基本的整数理论.

定义 1.38 (整除) 对于两个自然数 m 和 n 而言, m 整除 n (等价的一些说法: m 是 n 的一个因子 (约数), n 是 m 的一个倍数, n 被 m 整除), 记成 $m|n$, 当且仅当 $m \leqslant n$ 并且关于 x 的一元一次方程 $n = m \cdot x$ 在自然数集合 $\mathbb{N}$ 中有解.

命题 1.13 自然数集合 $\mathbb{N}$ 上的整除关系是一个自反、传递, 但非对称的二元关系, 即

(1) $m|m$;

(2) 如果 $m|n$ 且 $n|k$, 那么 $m|k$;

(3) 如果 $m|n$ 且 $n|m$, 那么 $m = n$.

定义 1.39 (素数) 一个自然数 p 是一个素数当且仅当 $p > 1$ 并且 $\forall x(1 < x < p \to x$ 不整除 $p)$.

所以, $p > 1$ 不是素数当且仅当 $\exists x(1 < x < p \wedge x|p)$.

引理 1.5 (素因子存在性) 如果 a 是一个大于 1 的自然数, 那么必有一个素数 p 整除 a.

证明 设 $a > 1$ 为一个自然数. 如果 a 本身是一个素数, a 是 a 的一个素因子. 不妨假设 a 不是一个素数. 令

$$A = \{b \in \mathbb{N} \mid 1 < b < a \wedge b|a\}.$$

此 A 非空. 根据自然数集合的秩序原理, A 有一个最小元. 令 $p = \min(A) = A$ 中的最小元, 那么 $p > 1$ 是一个素数, 从而是 a 的一个素因子. □

定理 1.32 (欧几里得素数定理) 存在任意大的素数.

证明 用反证法. 假设不然, 即 $\exists M \in \mathbb{N}(\forall p \in \mathbb{N}($如果 p 是素数, 那么 $p < M))$. 令

$$A = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ 是一个素数}\}.$$

那么 A 是自然数集合的一个非空有界 $(\exists M \in \mathbb{N} \forall x \in A(x < M))$ 子集. 根据最大数原理, A 有一个最大元 q ($\mathbb{N}$ 中最大的素数). 将 A 单调递增地罗列出来:

$$A = \{p_1, p_2, \cdots, p_t\}_<,$$

其中 $p_t = q$ 是最大的素数.

令 $c = (p_1 \cdot p_2 \cdots p_t) + 1$, 那么, $c > p_t > p_1 > 1$ 不是素数. 根据素因子存在引理, c 有一个素因子 p. 此素数 p 必定在集合 A 之中, 比如, $p = p_i$. 那么, $c = c_1 \cdot p_i$.

于是,

$$p_i \cdot c_1 - p_i \cdot (p_1 \cdot \cdots \cdot p_{i-1} \cdot p_{i+1} \cdot \cdots \cdot p_t) = 1.$$

也就是说, $p_i \cdot (c_1 - (p_1 \cdot \cdots \cdot p_{i-1} \cdot p_{i+1} \cdot \cdots \cdot p_t)) = 1$. 由于

$$c_1 - (p_1 \cdot \cdots \cdot p_{i-1} \cdot p_{i+1} \cdot \cdots \cdot p_t)$$

是一个大于 0 的自然数, 我们得到一个矛盾, 因为 p_i 是一个素数, 两个大于 0 的自然数的乘积不可能等于 1. □

推论 1.4 (典型素数递增序列) *存在唯一一个满足如下要求的全体素数的典型序列*

$$\langle p_0, p_1, \cdots, p_n, \cdots \rangle,$$

(1) $p_0 = 2$;

(2) $p_n < p_{n+1}$;

(3) *在* p_n *和* p_{n+1} *之间没有素数*;

(4) *如果* p *是一个素数, 那么* p *一定是这个序列中的某一个* (*也是唯一的一个*)p_n.

证明 令 $\mathbb{P}$ 为全体素数所成的集合. 欧几里得定理表明这是一个无限集合.

令 $p_0 = \min(\mathbb{P}) = 2$.

递归地定义 $p_{n+1} = \min(\mathbb{P} - \{p_0, \cdots, p_n\})$. 那么, 如果 $i < j$, 那么 $p_i < p_j$, 并且

$$\mathbb{P} = \{p_0, p_1, \cdots, p_n, p_{n+1}, \cdots\}.$$ □

定义 1.40 (最大公因子) 设 $m > 1$ 和 $n > 1$ 是两个自然数.

(1) d 是 m 和 n 的一个公因子 (公约数) 当且仅当 $d|m$ 和 $d|n$.

(2) d 是 m 和 n 的最大公因子 (最大公约数), 记成 $\gcd(m,n)$, 当且仅当 d 是 m 和 n 的所有公因子中最大的数. 也就是说,

$$\gcd(m,n) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant k \leqslant \min\{m,n\} \text{ 且 } k|m \text{ 及 } k|n\}.$$

(3) m 和 n 互素当且仅当 $\gcd(m,n) = 1$.

定义 1.41 (最小公倍数) 设 $m > 1$ 和 $n > 1$ 是两个自然数.

(1) u 是 m 和 n 的一个公倍数当且仅当 $m|u$ 和 $n|u$.

(2) u 是 m 和 n 的最小公倍数, 记成 $\operatorname{lcm}(m,n)$, 当且仅当 u 是 m 和 n 的所有公倍数中最小的那个数. 也就是说,

$$\operatorname{lcm}(m,n) = \min\{j \in \mathbb{N} \mid m|j \text{ 且 } n|j\}.$$

命题 1.14 设 $m>1$ 和 $n>1$ 是两个自然数.

(1) 若 m 和 n 是两个不相同的素数, 那么 $\gcd(m,n)=1$.

(2) $\gcd(m,n)\cdot \text{lcm}(m,n)=m\cdot n$.

(3) 若 $\gcd(m,n)=1$, 那么 $\text{lcm}(m,n)=m\cdot n$.

定理 1.33 任给两个整数 a 和 b, 若 $b>0$, 则一定存在满足下列两项要求的两个整数 q 和 r:

(i) $a=b\cdot q+r$;

(ii) $0\leqslant r<b$.

其中 q 称为 a 除以 b 所得的商, r 称为余数.

证明 给定 a,b, 设 $b>0$. 考虑

$$A(a,b)=\{a-bq \mid q\in\mathbb{Z} \text{ 且 } a-bq\geqslant 0\}.$$

$A(a,b)$ 是自然数集合的一个子集合, 而且非空 (比如, $a+a^2b=a-b(-a^2)\in A(a,b)$).

根据自然数秩序原理, 令 $r=\min(A(a,b))$. 那么, 有一个整数 q 满足 $r=a-bq$, 因为 $r\in A(a,b)$, 这样我们就有 $a=bq+r$, 剩下的是检查 $0\leqslant r<b$ 是否成立. 根据 $A(a,b)$ 以及 r 的定义, $0\leqslant r$. 我们断定 $r<b$. 这是因为, 如果不然, $r\geqslant b$, 那么

$$0\leqslant r-b=a-bq-b=a-b(q+1)\in A(a,b).$$

这就是一个矛盾, 因为 $b>0$, $r-b<r$. □

最大公因子表示定理

- 最大公因子的线性组合表示

应用带余除法, 我们能够给出两个自然数最大公因子的基本公式: $\gcd(m,n)$ 一定是 m 和 n 的一个线性组合.

定理 1.34 (最大公因子表示定理) 设 m 和 n 是两个大于 1 的自然数, 那么一定有一个整数对 (u,v) 来满足如下等式:

$$\gcd(m,n)=u\cdot m+v\cdot n.$$

证明 设 m 和 n 是两个大于 1 的自然数. 考虑如下集合:

$$L(m,n)=\{u\cdot m+v\cdot n \mid u\in\mathbb{Z} \text{ 及 } v\in\mathbb{Z}\},$$

$L(m,n)$ 中必有正整数. 根据自然数秩序原理, 令 d 为 $L(m,n)$ 中的最小正整数, 并且设 $d=u_0m+v_0n$, 其中 u_0 和 v_0 是两个整数.

断言 $d=\gcd(m,n)$.

用带余除法, 得到满足要求 $m = d \cdot q + r$, $0 \leqslant r < d$ 的两个整数 q 和 r. 直接计算一下:

$$\begin{aligned} r &= m - dq \\ &= m - q(u_0 m + v_0 n) \\ &= m(1 - u_0 q) + n(-v_0 q), \end{aligned}$$

于是, $r \in L(m, n)$. 由此以及 d 的最小性, $r = 0$. 这就表明: $d|m$.

由于 n 和 m 是对称的, 同理得到 $d|n$. 也就是说, d 是 m 和 n 的一个公因子.

令 $c = \gcd(m, n)$.

由于 $0 < d$ 是 m 和 n 的公因子, 我们一定有 $d \leqslant c = \gcd(m, n)$.

设 $m = c \cdot m_0$, $n = c \cdot n_0$. 直接计算一下:

$$\begin{aligned} d &= u_0 m + v_0 n \\ &= u_0(c \cdot m_0) + v_0(c \cdot n_0) \\ &= c(u_0 \cdot m_0 + v_0 \cdot n_0), \end{aligned}$$

所以, $c|d$. 于是, $c \leqslant d$.

综合起来:

$$\gcd(m, n) = c = d = u_0 \cdot m + v_0 \cdot n. \qquad \square$$

推论 1.5 设 m 和 n 是两个大于 1 的自然数. 那么, 如下两个命题等价:

(1) m 和 n 互素;

(2) 有一个整数对 (u, v) 满足等式 $1 = u \cdot m + v \cdot n$.

推论 1.6 设 m 和 n 是两个大于 1 的自然数. 那么, m 和 n 的每一个公因子都一定是 $\gcd(m, n)$ 的一个因子.

我们将辗转应用带余除法来求最大公因子, 也就是下面的欧几里得算法, 以及最大公因子的一个线性组合表示.

辗转相除法求最大公因子的基本理由是下面的归结引理:

引理 1.6 (最大公因子归结引理) 假设 $a > b > 0$ 是两个自然数, 以及 $a = b \cdot q + r$, $0 < r < b$. 那么

$$\gcd(a, b) = \gcd(b, r).$$

这个最大公因子归结引理表明, 我们可以利用带余除法, 将求 $\gcd(a, b)$ 的问题转化为关于 b 和求带余除法之后所得余数的最大公因子问题. 后者显然要比前者简单一些, 因为所涉及的数都变小了. 而且, 如果需要, 还可进一步对这一对数施展带余除法. 如此辗转相除, 直到余数为 0 为止.

证明 因为 $r = a - bq$, 所以, $\gcd(a,b)|r$. 也就是说, $\gcd(a,b)$ 是 r 和 b 的一个公因子. 根据前面的推论 1.6, 每一个公因子都是最大公因子的一个因子, 我们得到 $\gcd(a,b)|\gcd(b.r)$.

再由 $a = bq + r$, $\gcd(b,r)|a$. 也就是说, $\gcd(b,r)$ 是 a 和 b 的一个公因子. 据此以及前述关于公因子与最大公因子之间的整数关系的推论 1.6, $\gcd(b,r)|\gcd(a,b)$.

综上所述, $\gcd(a,b) = \gcd(b,r)$. □

引理 1.7 (显式因子引理) 若 p 是一个素数, m 和 n 是两个大于 1 的自然数, 那么

$$p|(mn) \text{ 当且仅当 } (p|m \text{ 或者 } p|n).$$

定理 1.35 (算术基本定理/因子分解定理) 每一个大于 1 的自然数都可以分解成素数幂的乘积, 而且在不计较大小顺序的条件下这种素因子分解是唯一的.

证明 首先, 对于任意一个自然数 n, 我们定义如下集合 $A(n)$:

$$A(n) = \{p \in \mathbb{N} \mid 1 < p \leqslant n, \text{ 且 } p \text{ 是一个素数, 并且 } p|n\}.$$

根据素因子存在引理, $A(n)$ 是一个非空集合, 并且由定义, $A(n)$ 有上界. 根据最大数原理, $A(n)$ 中有一个最大素数 $\max(A(n))$, 而且 $\max(A(n))$ 是 n 的一个素因子, 也就是 n 的最大素因子.

现在我们用数学归纳法来证明因子分解定理.

我们先验证初始条件:

设 $n = 2$, 最小的大于 1 的自然数. 由于 2 是一个素数, 因子分解定理对于 $n = 2$ 成立.

现在我们来验证归纳条件:

作为归纳假设, 我们假定对于所有的大于 1 小于 n 的自然数 m, 因子分解定理都成立. 我们来证明因子分解定理对于 n 也成立.

令 $p = \max(A(n))$. 根据上面的定义和讨论, p 是 n 的一个最大素因子. 考虑下面的集合 B:

$$B = \{i \in \mathbb{N} \mid 0 < i \text{ 且 } p^i \nmid n\},$$

由于 $p^i < p^{i+1}$, 所有 p 的方幂的全体是一个没有最大数的集合, 必然有 p 的某一个方幂大于 n, 因此不能是 n 的因子, 这就表明 B 是一个非空集合. 根据自然数的秩序原理, 令 $k = \min(B)$, $0 < k$, 令 $k = S(m)$. 因为 $p|n$, p^k 不整除 n, $1 < k$, 那么 $1 \leqslant m$. 令 n_1 是一个 n 的因子, 且满足如下等式:

$$n = p^m \cdot n_1.$$

如果 $n_1 = 1$, 那么 $n = p^m$, 因子分解定理对 n 也成立, 我们完成归纳步骤.

现在假设 $n_1 > 1$. 注意此时 p 不是 n_1 的因子, 由于 p 是一个素数, p 和 n_1 互素. 尤其是, 如果 q 是 n_1 的一个素因子, 那么, 根据显式因子引理, q 不能是 p^m 的因子, 但是 $q \in A(n)$. 同样地, 依据显式因子引理, 如果 $q \in A(n)$, $q \neq p$, 那么 $q|n_1$. 这就表明我们有如下等式:

$$A(n_1) = A(n) - \{p\}.$$

依据归纳假设, 因子分解定理对于 n_1 成立, 而 n_1 的所有素因子都在 $A(n_1)$ 中, 不妨设对于 $A(n_1)$ 我们可以罗列成 $q_1, \cdots, q_s$ 以及

$$n_1 = q_1^{i_1} \cdots q_s^{i_s}$$

是 n_1 的唯一素因子分解, 其中 $1 \leqslant i_1, \cdots, i_s$ 是自然数. 那么, 综合起来, 我们就有

$$n = p^m \cdot q_1^{i_1} \cdots q_s^{i_s}.$$

因此, 因子分解定理对于 n 成立.

这样, 我们就完成了归纳条件的验证. 依据数学归纳法原理, 自然数的因子分解定理就得到了证明, 从而, 整数因子分解定理得到证明. □

1.4.2　有理数集合

这里我们应用前面定义的整数结构来定义**有理数集合**$\mathbb{Q}$ 以及它上面的算术运算和线性序, 从而得到**有理数**结构 $(\mathbb{Q}, 0, 1, +, \cdot, <)$. 下面的有理数定义将实现我们保持元数学意义上有理数的有限特性的愿望, 我们在后面的例 1.19 中看到在集合论中每一个有理数事实上都是一个彻底有限的集合 (见后面的定义 1.54). 当然, 还有一种更为直接的方式来引入有理数. 直观上将两个具有相同比值的整数有序对视为等价, 这就在整数平面上确定了一种自然的等价关系. 这样, 等价类中的整数有序对就都具有相同的比值, 从而每一个等价类就是其中的每一个整数对的 "商". 于是, 就可以用这些等价类来表示有理数, 只不过这些等价类都是无穷可数集合. 这种表示自然就失去了直觉上有理数的有限性, 好在这些等价类中都有非常典型的代表元可以很规范地选取. 下面的有理数定义正是利用这样选取出来的代表元来表示有理数.

定义 1.42　有理数集合 $\mathbb{Q}$ 定义如下:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{Q}_f^+ = \{(0, (m, n)) \mid 1 \leqslant m \in \mathbb{N},\ 2 \leqslant n \in \mathbb{N},\ \gcd(m, n) = 1\};\\
&\mathbb{Q}_f^- = \{(1, (m, n)) \mid 1 \leqslant m \in \mathbb{N},\ 2 \leqslant n \in \mathbb{N},\ \gcd(m, n) = 1\};\\
&\mathbb{Q}^+ = \mathbb{N} \cup \mathbb{Q}_f^+;\\
&\mathbb{Q}^- = \mathbb{Z}^- \cup \mathbb{Q}_f^-;\\
&\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-.
\end{aligned}$$

称 $\mathbb{Q}_f^+$ 中的元素为**正分数**; 并且用记号 m/n, 或者 $\dfrac{m}{n}$ 来表示正分数 $(0,(m,n))$, 即

$$m/n = \frac{m}{n} = (0,(m,n))$$

当且仅当

$$m/n\text{是一个有序对并且}\,(m/n)_0 = 0 \wedge (1 \leqslant m \in \mathbb{N} \wedge 2 \leqslant n \in \mathbb{N} \wedge \gcd(m,n) = 1);$$

称 $\mathbb{Q}_f^-$ 中的元素为**负分数**; 并且用记号 $-m/n$, 或者 $-\dfrac{m}{n}$ 来表示负分数 $(1,(m,n))$, 即

$$-m/n = -\frac{m}{n} = (1,(m,n))$$

当且仅当

$$-m/n\text{是一个有序对并且}\,(-m/n)_0 = 1 \wedge (1 \leqslant m \in \mathbb{N} \wedge 2 \leqslant n \in \mathbb{N} \wedge \gcd(m,n) = 1);$$

称 $\mathbb{Q}^+$ 中的元素为**非负有理数**; 称 $\mathbb{Q}^-$ 中的元素为**负有理数**; 称 $\mathbb{Q}$ 中的元素为**有理数**.

于是, 由定义, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

定义 1.43 有理数 $x \in \mathbb{Q}$ 的绝对值 $|x|$ 定义如下:

$$|x| = \begin{cases} |x| & \text{如果 } x \in \mathbb{Z}, \\ m/n & \text{如果 } x = m/n \in \mathbb{Q}_f^+, \\ m/n & \text{如果 } x = -m/n \in \mathbb{Q}_f^-. \end{cases}$$

由定义可见映射 $m/n \mapsto -m/n$ 是 $\mathbb{Q}_f^+$ 与 $\mathbb{Q}_f^-$ 之间的双射; 绝对值函数当限制在 $\mathbb{Q}^-$ 上时是从 $\mathbb{Q}^-$ 到 $\mathbb{Q}^+$ 上的双射; 当限制在 $\mathbb{Q}^+$ 上时是 $\mathbb{Q}^+$ 上的恒等映射.

定义 1.44 定义 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Q}$ 上的一元函数加法逆元映射 $x \mapsto -x$ 如下:

(1) $-0 = 0$;

(2) 对于 $1 \leqslant m \in \mathbb{N}$, $-m = (1,(m,1))$ 以及 $-(1,(m,1)) = m$;

(3) 对于 $1 \leqslant m \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant n \in \mathbb{N}$, $\gcd(m,n) = 1$, $-(0,(m,n)) = (1,(m,n))$ 以及

$$-(1,(m,n)) = (0,(m,n)).$$

命题 1.15 映射 $x \mapsto -x$ 是一个双射, 并且 $-(-x) = x$, 以及 $x + (-x) = 0$.

定义 1.45 有理数之间的序关系 $<$ 定义如下:

(1) 如果 $\{x,y\} \subset \mathbb{N}$, 那么 $x < y \leftrightarrow x \in y$;

(2) 如果 $x \in \mathbb{N}$, $y = m/n \in \mathbb{Q}_f^+$, 那么

$$x < y \leftrightarrow x \cdot n \in m$$

以及

$$y < x \leftrightarrow m \in x \cdot n;$$

(3) 如果 $x = m/n \in \mathbb{Q}_f^+$, $y = p/q \in \mathbb{Q}_f^+$, 那么 $x < y \leftrightarrow m \cdot q \in n \cdot p$;

(4) 如果 $x \in \mathbb{Q}^+$, $y \in \mathbb{Q}^-$, 那么 $y < x$;

(5) 如果 $x \in \mathbb{Q}^-$, $y \in \mathbb{Q}^-$, 那么 $x < y \leftrightarrow |y| < |x|$.

定理 1.36 (1) $(\mathbb{Q}, <)$ 是一个线性序;

(2) $(\mathbb{N}, <) \subset (\mathbb{Z}, <) \subset (\mathbb{Q}, <)$;

(3) $\forall x \in \mathbb{Q}\, \exists n \in \mathbb{N}\, (x < n)$;

(4) $\forall x \in \mathbb{Q}\, \exists i \in \mathbb{Z}\, (i < x)$;

(5) $\forall x \in \mathbb{Q}\, (0 \leqslant |x|)$;

(6) $\forall x \in \mathbb{Q}\, \forall y \in \mathbb{Q}\, (x < y \leftrightarrow -y < -x)$.

证明 (练习.) □

定义 1.46 对于 $1 \leqslant m \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant n \in \mathbb{N}$, 令

$$[(m,n)] = \begin{cases} (0,(m,n)) & \text{若 } \gcd(m,n) = 1, \\ k & \text{若 } m = k \cdot n, \\ (0,(q,p)) & \text{若 } \left(\begin{array}{l} \gcd(m,n) \notin \{1,n\} \wedge \\ m = q \cdot \gcd(m,n) \wedge n = p \cdot \gcd(m,n) \end{array} \right). \end{cases}$$

定义 1.47 有理数之间的加法定义如下:

(1) 如果 $(z,x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, 那么 $z = x + y \leftrightarrow z = x +_{\mathbb{N}} y$;

(2) 如果 $(z,x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_f^+ \times \mathbb{N}$ 并且 $x = m/n$, 那么 $z = x + y \leftrightarrow z = (m +_{\mathbb{N}} ny)/n$;

(3) 如果 $(z,y,x) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Q}_f^+$ 并且 $x = m/n$, 那么 $z = y + x \leftrightarrow z = (m +_{\mathbb{N}} ny)/n$;

(4) 如果 $(z,x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_f^+ \times \mathbb{Q}_f^+$ 并且 $x = m/n$ 以及 $y = q/p$, 那么

$$z = x + y \leftrightarrow z = [(mp +_{\mathbb{N}} nq, np)];$$

(5) 如果 $(z,x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^- \times \mathbb{Q}^-$, 那么

$$z = x + y \leftrightarrow (z \in \mathbb{Q}^- \wedge |z| = |x| + |y|);$$

(6) 如果 $(z,x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^- \times \mathbb{Q}^+$, 那么

$$z = x + y \leftrightarrow ((y < |x| \wedge z \in \mathbb{Q}^- \wedge |x| = |z| + y) \vee (|x| \leqslant y \wedge z \in \mathbb{Q}^+ \wedge y = |x| + z));$$

(7) 如果 $(z,y,x) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^-$, 那么

$$z = y + x \leftrightarrow ((y < |x| \wedge z \in \mathbb{Q}^- \wedge |x| = |z| + y) \vee (|x| \leqslant y \wedge z \in \mathbb{Q}^+ \wedge y = |x| + z)).$$

注意, 如果 $\gcd(m,n)=1, y\in\mathbb{N}$, 那么 $\gcd(m+ny,n)=1$.

命题 1.16 (1) $(\mathbb{Q},+,0)$ 是一个加法交换群, 并且 $(\mathbb{Z},+,0)\subset(\mathbb{Q},+,0)$.

(2) 有理数加法与有理数序相匹配:

$$\forall x\in\mathbb{Q}\,\forall y\in\mathbb{Q}\,\forall z\in\mathbb{Q}(x<y\rightarrow z+x<z+y).$$

证明 (练习.) □

定义 1.48 有理数之间的乘法运算定义如下:

(1) 如果 $(z,x,y)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, 那么 $z=x\cdot y\leftrightarrow z=x\cdot_{\mathbb{N}}y$;

(2) 如果 $(z,x,y)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}_f^+\times\mathbb{N}$ 并且 $x=m/n$, 那么 $z=x\cdot y\leftrightarrow z=[(m\cdot_{\mathbb{N}}y,n)]$;

(3) 如果 $(z,y,x)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{N}\times\mathbb{Q}_f^+$ 并且 $x=m/n$, 那么 $z=y\cdot x\leftrightarrow z=[(m\cdot_{\mathbb{N}}y,n)]$;

(4) 如果 $(z,x,y)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}_f^+\times\mathbb{Q}_f^+$ 并且 $x=m/n$ 以及 $y=q/p$, 那么

$$z=x\cdot y\leftrightarrow z=[(m\cdot_{\mathbb{N}}q,n\cdot_{\mathbb{N}}p)];$$

(5) 如果 $(z,x,y)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}^-\times\mathbb{Q}^-$, 那么

$$z=x\cdot y\leftrightarrow z=|x|\cdot|y|;$$

(6) 如果 $(z,x,y)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}^-\times\mathbb{Q}^+$, 那么

$$z=x\cdot y\leftrightarrow(z\in\mathbb{Q}^-\wedge|z|=|x|\cdot y);$$

(7) 如果 $(z,y,x)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}^+\times\mathbb{Q}^-$, 那么

$$z=y\cdot x\leftrightarrow(z\in\mathbb{Q}^-\wedge|z|=y\cdot|x|).$$

定义 1.49 $\mathbb{Q}^*=\{x\in\mathbb{Q}\mid x\neq 0\}$, 称 $\mathbb{Q}^*$ 中的元素为 $\mathbb{Q}$ 上的乘法可逆元集合. 定义 $\mathbb{Q}^*$ 上的一元函数乘法逆元映射 $x\mapsto x^{-1}$ 如下:

(1) $1^{-1}=1$;

(2) 对于 $2\leqslant m\in\mathbb{N}$, $m^{-1}=(0,(1,m))$ 以及 $(1,(m,1))^{-1}=(1,(1,m))$;

(3) 对于 $2\leqslant n\in\mathbb{N}$,

$$(0,(1,n))^{-1}=n,\quad(1,(1,n))^{-1}=(1,(n,1));$$

(4) 对于 $2\leqslant m\in\mathbb{N}$, $2\leqslant n\in\mathbb{N}$, $\gcd(m,n)=1$,

$$(0,(m,n))^{-1}=(0,(n,m)),\quad(1,(m,n))^{-1}=(1,(n,m)).$$

定理 1.37 (1) 映射 $\mathbb{Q}^* \ni x \mapsto x^{-1} \in \mathbb{Q}^*$ 是 $\mathbb{Q}^*$ 上的一个双射, 并且

$$(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1};$$

(2) $\forall x \in \mathbb{Q}^* \left(x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1\right)$;

(3) $(\mathbb{Q}^*, \cdot, 1)$ 是一个交换群;

(4) $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$ 是一个特征为 0 的域;

(5) 有理数乘法与有理数序相匹配:

(a) $\forall x \in \mathbb{Q}\, \forall y \in \mathbb{Q}\, \forall z \in \mathbb{Q}\, ((x < y \,\wedge\, 0 < z) \to z \cdot x < z \cdot y)$;

(b) $\forall x \in \mathbb{Q}\, \forall y \in \mathbb{Q}\, \forall z \in \mathbb{Q}\, ((x < y \,\wedge\, z < 0) \to z \cdot y < z \cdot x)$.

证明 (练习.) □

命题 1.17 (1) $\forall x \in \mathbb{Q}^+\, \forall y \in \mathbb{Q}^+\, (x < y \to \exists z \in \mathbb{Q}^+\, (x < z \wedge z < y))$;

(2) $\forall x \in \mathbb{Q}\, \forall y \in \mathbb{Q}\, (x < y \to \exists z \in \mathbb{Q}\, (x < z \wedge z < y))$.

证明 (练习.) □

1.4.3 有理数线性序

前面我们看到任何一个秩序集合上的自同构只有唯一的平凡自同构, 也就是说秩序是一点变换的余地都没有. 现在我们来看另外一种极端的情形: 一个完全自相似的线性有序集, 即它的任何一个非空开区间都和整个线性有序集同构.

我们先回顾一下线性有序集的概念:

设 A 为一个集合. A 上的一个二元关系 $<$ 是一个线性序当且仅当 $<$ 满足如下要求:

(a) $\forall x\, (x \in A \to \neg(x < x))$;

(b) $\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge x < y \wedge y < z) \to x < z)$;

(c) $\forall x\, \forall y\, ((x \in A \wedge y \in A) \to (x = y \vee x < y \vee y < x))$.

当 $<$ 是 A 上的一个线性序时, 我们称 $(A, <)$ 为一个线性有序集.

对于 A 上的一个线性序 $<$, 我们定义

$$\leqslant = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in A \wedge (x < y \vee x = y)\},$$

也就是, $x \leqslant y \leftrightarrow (x < y \vee x = y)$.

定义 1.50 (1) 我们说 A 的一个线性序 $<$ 是稠密的当且仅当 $<$ 非空 (也就是 A 至少有两个元素) 并且

$$\forall x\, \forall y\, ((x \in A \wedge y \in A \wedge x < y) \to \exists z (z \in A \wedge x < z < y)).$$

(2) $b \in A$ 是 $<$ 的一个端点当且仅当或者

$$\forall x (x \in A \to (x = b \vee x < b))$$

(右端点) 或者

$$\forall x(x \in A \to (x = b \vee b < x))$$

(左端点).

(3) 由 a 和 $b, (a < b)$ 所决定的线性有序集 $(A, <)$ 的一个开区间, 记成 (a, b), 是这样的一个集合:

$$(a, b) = \{x \in A \mid a < x < b\}.$$

类似地, 我们定义它们所决定的闭区间 $[a, b]$, 半开半闭区间 $(a, b]$, $[a, b)$. a 是所论区间的左端点, b 是所论区间的右端点.

所以, 前面我们所讲的一个秩序的线段 $W[u]$, 用现在的话说就是这样一个半开半闭的区间: $[a, u)$, 这里 $a \in W$ 是这一秩序集的最小元.

例 1.14 (1) $(\mathbb{Z}, <)$ 不是一个稠密线性序但它没有端点.

(2) $(\mathbb{Q}, <)$ 是无端点稠密线性有序集.

例 1.15 令 $A \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$, 我们如下定义 A^ω 上的字典序 $\prec$:

(1) 对于 $f, g \in A^\omega$, 当 $f \neq g$ 时, 令 $\delta(f, g)$ 为不等式方程 $f(x) \neq g(x)$ 的最小解.

(2) 对于 $f, g \in A^\omega$,

$$f \prec g \leftrightarrow f \neq g \wedge f(\delta(f, g)) < g(\delta(f, g)).$$

结论: 当 $A = \mathbb{Z}$ 时, 我们得到一个无端点稠密线性序; 当 $A = \mathbb{N}$ 时我们得到一个带左端点的稠密线性序.

例 1.16 令

$$E_c = \{f \in \mathbb{Z}^\omega \mid \exists n\ \exists a\ (n \in \omega \wedge a \in \mathbb{Z} \wedge \forall i\ ((i \in \omega \wedge n < i) \to f(i) = a))\}.$$

令 $< = \prec \cap (E_c \times E_c)$. 那么 E_c 是一个无穷可数集合, $(E_c, <)$ 是一个无端点的稠密线性有序集.

例 1.17 令 E_p 为下列两个集合的交:

$$\{f \in \omega^\omega \mid \exists n \in \omega \exists m \in \omega (0 < m \wedge \forall i \in \omega - (n+1)(f(i+m) = f(i)))\},$$

$$\{f \in \omega^\omega \mid \forall j\ \exists k\ (k > j \wedge f(k) \neq f(k+1))\}.$$

令 $< = \prec \cap (E_p \times E_p)$. 那么 E_p 是一个无穷可数集合, $(E_p, <)$ 是一个无端点的稠密线性有序集.

例 1.18 (布劳威尔–克林[12]序) 对于两个自然数的有限序列 $s, t \in \omega^{<\omega}$, 我们定义 $s < t$ 当且仅当或者

$$|t| < |s| \wedge t = s\restriction_{|t|},$$

或者

$$\exists k\ (k < \mathrm{dom}(s) \wedge k < \mathrm{dom}(t) \wedge \forall i\ (i < k \to s(i) = t(i)) \wedge s(k) < t(k)).$$

$(\omega^{<\omega}, <)$ 是一个稠密线性有序集. 它有一个最大元素 $\langle\ \rangle$, 但是无最小元.

引理 1.8 假定 $(A, <_1)$ 是一个线性有序集合, $(B, <_2)$ 是一个无端点的稠密线性有序集合. 假定

$$F \subseteq A \text{ 和 } E \subseteq B$$

都是有限的, 并且 $h : F \to E$ 是从 $(F, <_1)$ 到 $(E, <_2)$ 上的一个同构. 如果

$$a \in A - F,$$

那么必有

$$b \in B - E$$

满足如下要求: $h \cup \{(a, b)\}$ 是从 $(F \cup \{a\}, <_1)$ 到 $(E \cup \{b\}, <_2)$ 上的同构.

证明 设 F, E 和 $h : F \to E$ 如引理的条件所给. 令 $a \in A - F$.

我们考虑三种情形.

第一: a 大于 F 的每一个元素.

此时, 我们在 B 中任取一个大于 E 的每一个元素的 b. 因为 B 无端点, 我们能取到.

第二: a 小于 F 的每一个元素.

同样我们在 B 中取一个小于 E 的每一个元素的 b.

第三: a 在 F 的某两个元素之间.

将 F 分成左右两部分: $F_0 = \{x \mid x \in F,\ x < a\}$ 以及 $F_1 = \{x \mid x \in F,\ x > a\}$. 这两个集合 F_0 和 F_1 都是非空而有限的. 令 a^* 为 F_0 的 $<_1$- 最大元并令 b^* 为 F_1 的 $<_1$- 最小元. 于是, 对 F 中所有的 x, 或者 $x \leqslant a^*$ 或者 $x \geqslant b^*$, 并且 $a^* < a < b^*$. 由于 h 是一个同构, 对于所有的 $x \in F$, 或者 $h(x) \leqslant h(a^*)$ 或者 $h(x) \geqslant h(b^*)$, 而且 $h(a^*) < h(b^*)$. 我们在 B 区间 $(h(a^*), h(b^*))$ 中取一个 b. 因为 $(B, <_2)$ 是稠密的, 我们可以这样做. □

定理 1.38 (康托尔同构定理) 如果 $(A, <_1)$ 和 $(B, <_2)$ 都是两个无穷可数的无端点的稠密线性有序集, 那么它们一定同构.

证明 这一证明采用往返渐进方法.

设 $(A, <_1)$ 和 $(B, <_2)$ 为两个无端点的无穷可数稠密线性有序集. 我们来定义一个同构.

12 Brouwer-Kleene.

令 $f:\mathbb{N}\to A$ 和 $g:\mathbb{N}\to B$ 分别为两个双射.

开始时, 令 $h(f(0))=g(0), F_1=\{f(0)\}$ 以及 $E_1=\{g(0)\}$.

归纳假设:

h 已经在 A 的一个有限子集合 F_n 上定义了, $h_n=h\restriction F_n$, $E_n=h[F_n]\subseteq B$, $h_n:F_n\to E_n$ 是一个序同构, 并且当 $n=2k$ 时 $f(k)\in F_n$, 当 $n=2k+1$ 时 $g(k)\in E_n$.

对于 $n+1$, 我们考虑两种情形.

第一：$n+1=2k$. (“往” 的过程.)

如果 $f(k)\in F_n$, 那么令 $F_{n+1}=F_n$ 及 $E_{n+1}=E_n$. 不给 h 定义新的值, 即 $h_{n+1}=h_n$.

现假定 $f(k)\notin F_n$. 此时令 $F_{n+1}=F_n\cup\{f(k)\}$, 以及 $a=f(k)$, 并且

$$D=\{m\in\mathbb{N}\mid h_n\cup\{(a,g(m))\}\ \text{是一个同构}\}.$$

由前面的引理, D 非空. 令 m^* 为 D 的最小元素. 再定义

$$h_{n+1}=h_n\cup\{\langle f(k),g(m^*)\rangle\},$$

并且令

$$E_{n+1}=E_n\cup\{g(m^*)\}.$$

第二：$n+1=2k+1$. (“返” 的过程.)

如果 $g(k)\in E_n$, 那么令 $F_{n+1}=F_n$ 及 $E_{n+1}=E_n$. 不给 h 定义新的值.

现在假定 $g(k)\notin E_n$. 令 $E_{n+1}=E_n\cup\{g(k)\}$, $a=g(k)$, 并且

$$D=\{m\in\mathbb{N}\mid h_n\cup\{(f(m),a)\}\ \text{是一个同构}\}.$$

由前面的引理, D 非空. 取 m^* 为 D 最小元素. 再定义

$$h_{n+1}=h_n\cup\{\langle f(m^*),g(k)\rangle\}.$$

第三：令 $F_{n+1}=F_n\cup\{f(m^*)\}$.

这完成归纳步骤.

最后, $A=\bigcup\{F_n\mid n\in\mathbb{N}\}$, $B=\bigcup\{E_n\mid n\in\mathbb{N}\}$, 以及 $h=\bigcup\{h_n\mid n<\omega\}$ 是一个同构. □

定理 1.39 如果 $(A,<)$ 是一个无穷可数线性有序集, 那么必定存在从 $(A,<)$ 到 $(\mathbb{Q},<)$ 上的保序映射. 因此, 任何一个可数序数 α 都同构于一个有理数集合的子集.

证明 (练习.) □

1.5 第二递归定义定理

无穷公理给出了一个无穷集合, 比如说 ω, 由此我们可以得到

$$\mathfrak{P}(\omega),\ \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\omega)),\ \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\omega))),\ \cdots$$

我们能不能将这些收集起来组成一个新的集合呢? 能不能得到一个集合 x 满足如下要求呢?

$$\omega \in x \wedge \forall a \forall b (a \in x \wedge b \in x \to a \cup \{b\} \in x).$$

到目前为止，我们所引进的公理还不足以正面回答这样的问题. 当然我们可以加强我们的无穷公理, 比如说, 将其加强成如下的表达式：

$$\forall y\ \exists x\ (y \in x \wedge \forall a \forall b (a \in x \wedge b \in x \to a \cup \{b\} \in x)).$$

这固然可以正面回答前述第二个问题或者类似的问题, 但对类似于前述第一个问题却帮助不大. 我们总不能一遇到无法回答的问题时就引进一条公理. 在我们的 ZF 系统中还有一条非常有用的非常一般的公理, 这就是映像存在原理 (也有称之为替换公理的).

公理 8 (映像存在原理[13])

$$\begin{aligned}&(\forall u\ \forall v\ \forall w\ (\phi(u,v) \wedge \phi(u,w) \to v = w))\\ &\to (\forall z\ \exists y\ \forall v\ (v \in y \leftrightarrow (\exists u\ (u \in z \wedge \phi(u,v))))),\end{aligned}$$

其中, 变量 y, z, w 在表达式 $\phi(u,v)$ 中没有自由出现.

这一原理讲的是：如果一个表达式 $\phi(u,v)$ 在任何时候都能保证至多只有一个对象 v 来和 u 一起满足性质 ϕ, 那么, 对任给一个集合 z, 都一定有它的由性质 ϕ 所决定的全体映像所组成的集合存在：

$$y = \{v \mid \exists u\ (u \in z \wedge \phi(u,v))\}.$$

如果我们将表达式 $\phi(u,v)$ 想象成一个 “部分函数” 的定义的话, 那么, 相对于集合 z 而言, 集合 y 正好就是这一部分函数在 z 上的 “值域”.

定义 1.51 *我们称一个表达式 $\phi(u,v)$ 为一个***泛函定义式***当且仅当它满足如下要求:*

$$(\forall u\ \forall v\ \forall w\ (\phi(u,v) \wedge \phi(u,w) \to v = w)).$$

---

13 Axiom Schema of Replacement.

这样, 映像存在原理讲的就是任何一个泛函定义式 ϕ 可以在任何一个集合 x 上定义出一个函数, 也就是说, 对于事先任意给定的集合 x, 如下的有序对之类一定是一个集合：

$$\{(a,b) \mid a \in x \wedge \phi(a,b)\}.$$

这里, 我们讲的是一种等价形式. 实际上, 映像存在原理讲的是这样的函数的值域是存在的：

$$\{b \mid a \in x \wedge \phi(a,b)\}.$$

由于我们有分解原理以及幂集公理, 只要这两种集合中的任何一种存在, 我们都可以得到另一种的存在性.

我们将在后面见到不少泛函定义式的例子以及如何利用映像存在原理来得到新的集合.

定理 1.40 (第二递归定义定理) 设 $\varphi(x_1,x_2,x_3)$ 是一个含有三个自由变元

$$x_1, x_2, x_3$$

的表达式, 并且

$$\forall n \in \omega\, \forall x \exists y (\varphi(n,x,y))$$

以及

$$\forall n \in \omega\, \forall u\, \forall v\, \forall w\, (\varphi(n,u,v) \wedge \varphi(n,u,w) \rightarrow v = w).$$

令

$$G(n,x) = y \leftrightarrow n \in \omega \ \wedge \ \varphi(n,x,y).$$

令 a 为一个集合. 那么, 一定存在唯一的一个满足如下要求的函数 f:

(1) $\mathrm{dom}(f) = \omega$;

(2) $f(0) = a$;

(3) $\forall n \in \omega\, (f(n+1) = G(n, f(n)))$.

证明 设 $\varphi(x_1,x_2,x_3)$, G 以及 a 为定理之条件所给出. 考虑如下关于变元 x 和 y 的表达式 $\psi(x,y)$：

(i) 如果 $x \notin \omega$, 那么 $y = \varnothing$;

(ii) 如果 $x = \varnothing$, 那么 $y = a$;

(iii) 如果 $x \in \omega \ \wedge \ x = n+1$, 那么存在满足如下要求的集合 h：

(a) h 是定义在 x 的一个函数;

(b) $h(0) = a$;

(c) $\forall i \in n (h(i+1) = G(i, h(i)))$;

(d) $y = G(n, h(n))$.

断言一 对于每一个 $n \in \omega$, 存在唯一的一对满足下述要求的 (h, y):

(1) h 是以 $n+1$ 为定义域的函数;

(2) $h(0) = a$;

(3) $\forall i \in n(h(i+1) = G(i, h(i)))$;

(4) $y = G(n, h(n))$.

同定理 1.12 的证明一样, 此断言对 $n \in \omega$ 施归纳而得证. 我们将此留作练习.

据此断言, 表达式 $\psi(x, y)$ 是一个泛函定义式. 依据映像存在原理, 如下便是一个集合:

$$A = \{y \mid \exists n \in \omega\ (\psi(n, y))\}.$$

现在定义 $f = \{(n, y) \in \omega \times A \mid \psi(n, y)\}$. 那么 f 就是一个定义在 ω 上的满足所有要求的函数. □

断言二 设 $\varphi(x, y)$ 为一个泛函定义式; 设 a 为一集合. 那么, 必存在满足如下等式要求的定义在 ω 上的唯一的函数 f:

(1) $f(0) = a$,

(2) $\forall n \in \omega\ (\varphi(f(n), f(n+1)))$.

证明 考虑由下述等价式所确定的表达式 $G(n, x) = y$:

$$G(n, x) = y \leftrightarrow n \in \omega \wedge \varphi(x, y).$$

应用定理 1.40 得到函数 f, 此 f 即为所求. □

我们现在应用第二递归定义定理来证明无穷公理的强形式:

定理 1.41 $\forall u\ \exists w\ (u \in w \wedge \forall a\ \forall b\ ((a \in w \wedge b \in w) \to a \cup \{b\} \in w))$.

证明 考虑下列表达式 $\psi(u, v)$:

$$(u = (a, b) \to v = a \cup \{b\}) \wedge (u \neq (a, b) \to v = \varnothing).$$

这个二元表达式是一个泛函定义式. 根据映像存在原理, 任给一个非空集合 x, 下述概括式定义了一个非空集合:

$$\{a \cup \{b\} \mid (a, b) \in x \times x\}.$$

现在考虑下列表达式 $\varphi(x, y)$:

$$(x \neq \varnothing\ \wedge\ \forall v(v \in y \leftrightarrow \exists a \exists b(a \in x \wedge b \in x \wedge v = a \cup \{b\})))\ \vee\ y = \varnothing.$$

根据上面的观察, 这个二元表达式是一个泛函定义式 (对于任意给定的 x, 满足 φ 的 y 唯一存在).

给定一个集合 u, 令 $y_0 = u \cup \{u\}$. 应用第二递归定义定理 1.40 之推论, 得到满足等式

$$y_{n+1} = \{a \cup \{b\} \mid a, b \in y_n\}$$

的序列 $\langle y_n \mid n \in \omega \rangle$. 令 $w = \bigcup \{y_n \mid n \in \omega\}$. 那么, $u \in w$, 以及

$$\forall a \in w \, \forall b \in w \, (a \cup \{b\} \in w).$$

□

传递闭包

前面, 我们定义了传递集合 (定义 1.25). 应用第二递归定义定理, 我们来证明任何一个集合都是传递集合的子集合, 并且在所有覆盖它的传递集合中有一个最小的传递集合, 即它的传递闭包.

定理 1.42 对于任何一个集合 X, 都存在唯一的一个满足如下要求的集合 Y:

(1) Y 是一传递集合,

(2) $X \subseteq Y$, 以及

(3) 如果 Z 是一传递集合, 且 $X \subseteq Z$, 那么 $Y \subseteq Z$.

证明 令 $\varphi(x, y)$ 为后述表达式: $y = x \cup \bigcup x$. 那么 $\varphi(x, y)$ 是一个函数定义表达式.

设 X 为一个任意给定的集合. 根据第二递归定义定理 (定理 1.40), 存在满足后面要求的唯一的长度为 ω 的序列 $\langle X_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$:

(1) $X_0 = X$;

(2) X_{n+1} 是满足 $\varphi[X_n, y]$ 的唯一集合 y.

令 $Y = \bigcup \{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. □

断言 (1) Y 是传递的;

(2) $X \subseteq Y$;

(3) 如果 Z 是传递的, 并且 $X \subseteq Z$, 那么 $Y \subseteq Z$.

假设 Z 是传递的, 并且 $X \subseteq Z$.

应用归纳法证明: $X_n \subseteq Z$.

注意到 $(\bigcup Z) \subseteq Z$. 根据归纳假设 $X_n \subseteq Z$,

$$(\bigcup X_n) \subseteq (\bigcup Z) \subseteq Z.$$

于是, $X_{n+1} = X_n \cup (\bigcup X_n) \subseteq Z$. □

定义 1.52 (传递闭包) 对于任意集合 X, 由定理 1.42 所给出的唯一传递集合 Y 被称为 X 的**传递闭包**, 并记成 $\mathcal{TC}(X)$.

显式地写出来：$\mathcal{TC}(X) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n = \bigcup\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, 其中 $X_0 = X$, 以及

$$X_{n+1} = X_n \cup \left(\bigcup X_n\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

事实 (1) 如果 X 是传递的, 那么 $\mathcal{TC}(X) = X$.

(2) $\mathcal{TC}(X) = \bigcap\{Y \mid X \subseteq Y \wedge Y \text{ 是传递集合}\}$.

1.6 集合 V_ω 与彻底有限集合

作为第二递归定义定理应用的第二个例子, 我们证明如下概括起来的对象是一个集合.

事实 如下之概括式定义一个集合:

$$\{\varnothing, \mathfrak{P}(\varnothing), \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\varnothing)), \cdots, \overbrace{\mathfrak{P}(\cdots(\mathfrak{P}}^{n+1}(\varnothing))\cdots), \cdots\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

证明 考虑由如下等价式所确定的表达式 $G(n,x) = y$:

$$G(n,x) = y \leftrightarrow n \in \omega \wedge y = \mathfrak{P}(x).$$

根据幂集公理,

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \exists y (y = \mathfrak{P}(x) \wedge \text{此 } y \text{ 唯一}),$$

应用第二递归定义定理 (定理 1.40), 令 f 为定义在 $\mathbb{N}$ 上的满足如下等式要求的唯一函数:

(1) $f(0) = \varnothing$;

(2) $\forall n \in \mathbb{N}\ (f(n+1) = G(n, f(n)) = \mathfrak{P}(f(n)))$.

此函数 f 之值域 $f[\omega]$ 就是所论之概括. □

定义 1.53 (1) $V_0 = \varnothing$.

(2) $V_{n+1} = \mathfrak{P}(V_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

(3) $V_\omega = \bigcup\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

定义 1.54 (彻底有限) 一个集合 x 被称为**彻底有限**集合[14] 当且仅当 x 的传递闭包 $\mathcal{TC}(x)$ 是一个有限集合.

例 1.19 (1) 如果 x 是传递集合, 而且是有限的, 那么 x 是彻底有限集合.

(2) 每一个 V_n 都是彻底有限集合.

(3) 如果 $x \in V_\omega$, 那么 x 是彻底有限集合.

(4) $\mathbb{Q} \subset V_\omega$, 从而每一个有理数 $x \in \mathbb{Q}$ 都是彻底有限集合.

14 Hereditarily finite sets.

我们将证明 V_ω 恰恰是所有彻底有限集合之集合. 为此, 我们需要引进 $\in$-极小原理, 我们公理系统 ZF 中的最后一条公理.

公理 9 ($\in$-极小原理[15])

$$\forall v_1 \left(\begin{array}{l} (\exists v_2\,(v_2 \in v_1)) \to \\ (\exists v_2\,(v_2 \in v_1 \;\wedge\; (\neg(\exists v_3\,(v_3 \in v_1 \;\wedge\; v_3 \in v_2))))) \end{array} \right).$$

定理 1.43 ($\in$- 极小性) 设 $\phi(v_0, v_1, \cdots, v_n)$ 为一个彰显全部自由变元的表达式. 那么

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \left(\begin{array}{l} (\exists x\ \phi(x, x_1, \cdots, x_n)) \to \\ (\exists x\ (\phi(x, x_1, \cdots, x_n)\ \wedge\ \forall y\ (y \in x \to (\neg\phi(y, x_1, \cdots, x_n))))) \end{array} \right),$$

其中, 变量 y 并非 $\phi(x, x_1, \cdots, x_n)$ 中的一个自由变元.

证明 给定表达式 $\phi(v_0, v_1, \cdots, v_n)$, 设 $x, x_1, \cdots, x_n$ 为 $n+1$ 个集合, 并且

$$\phi(x, x_1, \cdots, x_n)$$

成立. 令

$$A = \{a \in \mathcal{TC}(\{x\}) \mid \phi(a, x_1, \cdots, x_n)\}.$$

因为 $x \in A$, 所以 $A \neq \varnothing$. 根据 $\in$-极小原理, 令 $a \in A$ 满足要求 $a \cap A = \varnothing$. 那么

$$\forall y (y \in a \to (\neg\phi(y, x_1, \cdots, x_n))).$$

不然的话, 令 $b \in a$ 满足 $\phi(b, x_1, \cdots, x_n)$, 则此 $b \in \mathcal{TC}(\{x\})$, 从而 $b \in A$, 得到一个矛盾. □

这一定理模式表明：如果有一个集合有某种性质 ϕ, 那么就有一个 $\in$-极小的集合具有这一性质. 前面我们已经看到这样的例子：如果一个集合 x 满足 $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$, 那么 $x \notin x$. 一般来说, 是否存在一个集合 x 具有这样一种特性 $x \in x$? $\in$-极小原理就是用来解答这一问题的.

推论 1.7 $\forall x\ (x \notin x)$.

事实上, $\in$-极小性定理中的命题与 $\in$-极小原理等价.

定理 1.44 如下三个命题等价:

(1) 对于任何一个表达式 $\phi(x)$ 来说, 如果变量 y 并非 $\phi(x)$ 中的一个自由变量, 那么

$$(\exists x\ \phi(x)) \to (\exists x\ (\phi(x) \wedge \forall y\ (y \in x \to \neg\phi(y)))).$$

15 Axiom Schema of Foundation.

(2) 如果 M 是一个传递集合, $X \subseteq M$ 非空, 那么一定存在一个 $a \in X$ 来满足要求: $a \cap X = \varnothing$.

(3) 如果 A 是一个非空集合, 那么 $\exists a\,(a \in A \wedge a \cap A = \varnothing)$.

证明　(1) → (2). 设 M 为一个非空的传递集合, 而且 $X \subseteq M$ 非空. 考虑表达式 $\phi(u) : u \in X$. 又假设 $\exists u\phi(u)$. 于是有 $a \in X$ 满足要求 $\forall y \in a(\neg\phi(y))$. 因此, $a \cap X = \varnothing$.

(2) → (1). 假设 $\exists x\phi(x)$. 取 x 为满足 ϕ 的一个集合. 令 $M = \mathcal{TC}(\{x\})$, 那么, $x \in M$, 而且 M 是传递的. 令 $A = \{a \in M \mid \phi(a)\}$, 那么 A 非空. 于是, 存在 $a \in A$ 来满足要求 $a \cap A = \varnothing$. 由于 $a \in M$ 而且 M 是传递的, 故 $a \subseteq M$, 因而 $\phi(a) \wedge \forall y \in a(\neg\phi(y))$.

(3) → (2). 不需要证明.

(2) ⇒ (3). 给定非空集合 A, 令 $M = \mathcal{TC}(A)$, 那么 $A \subseteq M$ 非空. 由 (2) 即得. □

定理 1.45　$\forall x\,(x \in V_\omega \leftrightarrow (\exists n \in \omega\,(|n| = |\mathcal{TC}(x)|)))$.

证明　我们已经见到: 如果 $x \in V_\omega$, 那么 x 是彻底有限的.

断言一　如果 $x \subseteq V_\omega$ 是一有限集合, 那么 $x \in V_\omega$.

证明　设 $x = \{a_0, \cdots, a_m\} \subseteq V_\omega$. 对于 $i \in \{0, \cdots, m\}$, 令 $n_i \in \omega$ 满足 $a_i \in V_{n_i}$. 令

$$n = \max\{n_i \mid i \in m+1\} + 1.$$

那么, $x \subseteq V_n$, 因此, $x \in V_{n+1}$. 由此, $x \in V_\omega$. □

断言二　如果 x 是彻底有限的, 那么 $x \in V_\omega$.

证明　设 x 是彻底有限集合. 令 $y = \mathcal{TC}(\{x\})$, 那么 y 是一个有限集合, 并且 y 的每一个元素都是一个有限集合.

欲得一矛盾, 假设 $x \notin V_\omega$. 那么, $y - V_\omega \neq \varnothing$. 根据 $\in$-极小原理 (公理 9), 令 $z \in (y - V_\omega)$ 满足等式 $z \cap (y - V_\omega) = \varnothing$. 由于 y 是传递的, 我们得出 $z \subseteq V_\omega$ 之结论. 由于 y 是有限的, 且 $z \subseteq y$, z 就是有限的. 由断言一, $z \in V_\omega$. 这就是一个矛盾. □

定理 1.46　V_ω 具有如下性质:

(1) V_ω 是所有彻底有限集合之集合;

(2) V_ω 是一个传递集合;

(3) $\mathrm{Inf}(V_\omega)$;

(4) $\mathbb{N} \subset V_\omega$;

(5) V_ω 关于后述集合基本运算都封闭: 配对运算 $\{,\}$、并运算 $\cup$、二元交运算 $\cap$、相对差运算 $-$、笛卡尔乘积运算 $\times$ 以及幂集运算 $\mathfrak{P}$;

(6) 如果 $x \subset V_\omega$ 的一个有限子集, 那么 $x \in V_\omega$.

证明 (5) 设 $u, v \in V_\omega$. 令 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $u, v \in V_n$, 那么有以下结论.

(a) $\bigcup u \subset \bigcup V_n \subset V_{n+1}$, 从而 $\bigcup u \in \mathfrak{P}(V_{n+1}) \in V_\omega$.

(b) $\{u, v\} \subset V_n$ 以及 $\{u, v\} \in V_{n+1} \subset V_\omega$.

(c) 由于 $u \cup v \subseteq V_n$, $u \times v \subset V_n \times V_n$. 令 $(a, b) \in V_n \times V_n$, 那么 $(a, b) \subset V_{n+1}$, 从而 $(a, b) \in V_{n+2}$. 这表明 $V_n \times V_n \subset V_{n+2}$ 以及 $u \times v \in V_{n+3} \subset V_\omega$.

(d) $u \subset V_n$ 以及 $\mathfrak{P}(u) \subset \mathfrak{P}(V_n)$. 于是, $\mathfrak{P}(u) \in V_{n+2} \subset V_\omega$. □

推论 1.8 *如果 $X \in V_\omega$ 以及 $Y \in V_\omega$, 那么 $X \cup \{Y\} \in V_\omega$.*

证明 $X \cup \{Y\} = \bigcup\{X, \{Y\}\}$. □

定义 1.55 对于 $i, n \in \mathbb{N}$,

$$n \ominus i = \begin{cases} m \leftrightarrow (n \geqslant i \wedge i + m = n); \\ 0 \leftrightarrow n < i. \end{cases}$$

定理 1.47 (1) *如果 $n \in \mathbb{N}$, 那么存在满足下述要求的唯一有序对 (i, m):*

$$i \leqslant n,\ m \leqslant n,\ 2^i \leqslant n + 1 < 2^{i+1},\ 2^i + m = n + 1.$$

(2) *如果 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n > 0$, 那么存在满足下述要求的唯一的长度为 $m \geqslant 1$ 的序列 $\langle k_1, \cdots, k_m \rangle$:*

$$k_1 > \cdots > k_m \geqslant 0, \quad n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_m}.$$

证明 (1) 对 $n \in \mathbb{N}$ 施归纳.

当 $n = 0$ 时, $(0, 0)$ 即为所需之证据.

假设命题对于 $n \in \mathbb{N}$ 成立. 令 (i, m) 为唯一证据. 那么, $(n + 1) + 1 \leqslant 2^{i+1}$. 如果 $(n + 1) + 1 = 2^{i+1}$, 则有序对 $(i + 1, 0)$ 即为所求; 否则, $(i, m + 1)$ 即为所求. 故命题对 $n + 1$ 也成立.

(2) 同样地对 $n \in \mathbb{N}$ 施归纳.

当 $n = 1$ 时, 令 $m = 1$ 以及 $k_1 = 0$. 此时, $n = 1 = 2^{k_1}$.

假设对于所有的 $0 < k < n$, 命题对于 k 都成立. 我们进而验证命题对 n 也成立.

由 (1), 令 (i, ℓ) 为满足下述要求的唯一序对:

$$i < n,\ \ell < n, \quad 2^i \leqslant n < 2^{i+1}, \quad n = 2^i + \ell.$$

如果 $\ell = 0$, 则 $m = 1$, $k_1 = i$ 以及 $n = 2^{k_1}$. 否则, $\ell > 0$, $\ell < 2^i$ 和 $\ell + 1 < n$. 由归纳假设, 存在满足下述要求的唯一的长度 $\bar{m} \geqslant 1$ 的序列 $\langle \bar{k}_1, \cdots, \bar{k}_{\bar{m}} \rangle$:

$$\bar{k}_1 > \cdots > \bar{k}_{\bar{m}} \geqslant 0, \quad \ell = 2^{\bar{k}_1} + 2^{\bar{k}_2} + \cdots + 2^{\bar{k}_{\bar{m}}}.$$

令 $m = \bar{m} + 1$, $k_1 = i$, $k_2 = \bar{k}_1, \cdots, k_m = \bar{k}_{\bar{m}}$. 那么

$$k_1 > \cdots > k_m \geqslant 0,\ m \geqslant 1,\ n = 2^{k_1} + \ell = 2^{k_1} + \cdots + 2^{k_m}.$$ □

推论 1.9 存在一个典型的从 $[\mathbb{N}]^{<\omega}$ 到 $\mathbb{N}$ 的双射, 从而 $|[\mathbb{N}]^{<\omega}| = |\mathbb{N}|$.

证明 令 $f(\varnothing) = 0$ 以及对于非空的 $a \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$ 令

$$f(a) = \sum_{i \in a} 2^i$$

那么根据定理 1.47, f 是从 $[\mathbb{N}]^{<\omega}$ 到 $\mathbb{N}$ 的双射. □

定义 1.56 对于 $n \in \mathbb{N}$, 定义

(1) $\lg_2(n) =$ 满足不等式 $2^i \leqslant n + 1 < 2^{i+1}$ 的唯一的 $i \leqslant n$;

(2) $r(n) =$ 满足等式 $n + 1 = 2^{\lg_2(n)} + m$ 的唯一的 $m \leqslant n$.

这样, 对于 $n \in \mathbb{N}$, 我们总有 $\lg_2(n) \leqslant n$, $r(n) \leqslant n$, 以及

$$2^{\lg_2(n)} \leqslant n + 1 < 2^{\lg_2(n)+1}, \qquad n + 1 = 2^{\lg_2(n)} + r(n).$$

定理 1.48 存在从 $\mathbb{N}$ 到 V_ω 的典型双射, 因此, $|\mathbb{N}| = |V_\omega|$.

证明 我们来定义从 $\mathbb{N}$ 到 V_ω 的典型双射.

首先, 我们用下述等式定义 $H : V_\omega \times V_\omega \to V_\omega$:

$$H(X, Y) = X \cup \{Y\}.$$

根据前面的推论 1.8, H 的定义没有任何问题.

其次, 我们依如下等式递归地定义 $f : \mathbb{N} \to V_\omega$:

(i) $f(0) = \varnothing$;

(ii) $f(n + 1) = H(f(r(n)), f(\lg_2(n))) = f(r(n)) \cup \{f(\lg_2(n))\}$ $(n \in \mathbb{N})$.

注意到对于每一个 $n \in \omega$ 都有 $r(n) \leqslant n$ 以及 $\lg_2(n) \leqslant n$, 这样的递归定义是合理的.

断言三 如果 $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_m}$, $k_1 > \cdots > k_m \geqslant 0$, $m \geqslant 1$, 那么

$$f(n) = \{f(k_1), f(k_2), \cdots, f(k_m)\}.$$

$f(1) = f(0) \cup \{f(0)\}$.

令 $n > 1$, $m \geqslant 1$, 以及 $k_1 > \cdots > k_m \geqslant 0$ 满足

$$n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_m}.$$

如果 $m > 1$, 则令 $\ell = 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_m}$; 否则, 令 $\ell = 0$, 那么 $n = 2^{k_1} + \ell$.

情形一 $m = 1$.

此时 $\ell = 0$, 那么 $r(n \ominus 1) = 0$, $\lg_2(n \ominus 1) = k_1$ 以及

$$f(n) = f(0) \cup \{f(k_1)\} = \{f(k_1)\}.$$

情形二 $m > 1$.

此时 $n > \ell > 0$. 那么 $r(n \ominus 1) = \ell$ 以及 $\lg_2(n \ominus 1) = k_1$. 根据归纳假设,

$$f(\ell) = \{f(k_2), \cdots, f(k_m)\}.$$

由定义, $f(n) = f(\ell) \cup \{f(k_1)\}$. 于是,

$$f(n) = \{f(k_1), f(k_2), \cdots, f(k_m)\}.$$

□

断言四 f 是单射.

假设不然. 令 $n \in \mathbb{N}$ 为满足 $\exists t < k(f(t) = f(k))$ 的最小 k. 令 $t < n$ 满足 $f(t) = f(n)$, 那么 $t > 0$.

令 $k_1 > \cdots > k_m \geqslant 0$ 为满足如下等式的长度为 $m \geqslant 1$ 的序列:

$$n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_m}.$$

令 $\bar{k}_1 > \cdots > \bar{k}_{\bar{m}} \geqslant 0$ 为满足如下要求的长度为 $\bar{m} \geqslant 1$ 的序列:

$$t = 2^{\bar{k}_1} + 2^{\bar{k}_2} + \cdots + 2^{\bar{k}_{\bar{m}}}.$$

令 ℓ 为不等式 $k_i \neq \bar{k}_i$ 成立的最小指标 i. 从而, $k_\ell > \bar{k}_\ell$.

由上面的断言三,

$$f(n) = \{f(k_1), f(k_2), \cdots, f(k_m)\},$$

以及

$$f(t) = \{f(\bar{k}_1), f(\bar{k}_2), \cdots, f(\bar{k}_{\bar{m}})\}.$$

由于 $f(n) = f(t)$, $f(k_\ell) \in f(t)$. 另一方面, 由 n 的极小性, $f \upharpoonright n$ 是一单射. 因为 $k_\ell \leqslant k_1 < n$, $\bar{k}_1 < t < n$, 我们必有 $f(k_\ell) \notin f(t)$, 矛盾. □

断言五 如果 $x \subset f[\mathbb{N}]$ 是有限集合, 那么 $x \in f[\mathbb{N}]$.

如果 x 是空集, 那么 $x = \varnothing = f(0)$.

现设 $n_1 < n_2 < \cdots < n_m$ 满足 $x = \{f(n_1), f(n_2), \cdots, f(n_m)\}$, 其中 $1 \leqslant m$, 那么, 根据断言三,

$$f(2^{n_m} + \cdots + 2^{n_2} + 2^{n_1}) = \{f(n_1), f(n_2), \cdots, f(n_m)\}.$$

令 $j = 2^{n_m} + \cdots + 2^{n_2} + 2^{n_1}$, 即有 $f(j) = x$.

断言五便成立. □

断言六　$f[\mathbb{N}] = V_\omega$.

依定义, $f[\mathbb{N}] \subseteq V_\omega$.

欲得一矛盾, 假设 $V_\omega \not\subseteq f[\mathbb{N}]$. 即假设 $V_\omega - f[\mathbb{N}] \neq \varnothing$.

根据 $\in$-极小原理, 令 $x \in (V_\omega - f[\mathbb{N}])$ 满足 $x \cap (V_\omega - f[\mathbb{N}]) = \varnothing$. 因为 $f[\mathbb{N}] \subseteq V_\omega$, 我们得到: $x \subset f[\mathbb{N}]$ 以及 x 是有限的. 但根据上面的断言五, 这就意味着 $x \in f[\mathbb{N}]$. 这便是所求之矛盾.

从而, 断言六得证. □

综合断言四和断言六, 我们得到结论: $f : \mathbb{N} \to V_\omega$ 是一双射. □

定理 1.49　V_ω 是满足下述三条要求的最小的集合 W:

(1) $\varnothing \in W$;

(2) 如果 $v \in W$, 那么 $\{v\} \in W$;

(3) 如果 $v, w \in W$, 那么 $v \cup w \in W$.

证明　(练习.) □

1.7　序　　数

在我们的集合论论域之中, 有一类集合具有特别好的属性. 可以说, 这一类集合的全体构成了集合论论域的主心骨. 在一定含义上讲, 这一类集合也标志着我们关于一种完美的有序世界的想象.

回顾传递集合之概念: 一个集合 x 为传递集合当且仅当 $\forall y\ (y \in x \to y \subseteq x)$.

定义 1.57 (序数)　(1) 一个集合 x 为一个**序数**当且仅当 x 同时满足下列三个要求:

(a) x 是一传递集合; (记成 $\varphi_0(x)$)

(b) 对 x 的任意两个元素 $u \in x$, $v \in x$, 在 $u \in v$, $v \in u$, 或者 $u = v$ 这三者之中我们总有且只有一种成立; (记成 $\varphi_1(x)$)

(c) 对 x 的任意一个子集合 $y \subseteq x$, 若 y 非空, 则必有满足 $z \cap y = \varnothing$ 的 $z \in y$ 存在 (即 y 必有一个 $\in$-极小元素). (记成 $\varphi_2(x)$)

我们将用希腊字母 $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu$ 等来标记序数.

(2) 序数 α 是一个**后继序数**当且仅当存在一个满足要求 $\alpha=\beta\cup\{\beta\}$ 的 $\beta\in\alpha$. 如果序数 α 和序数 β 满足等式 $\alpha=\beta\cup\{\beta\}$, 我们就称 α 是 β 的后继并将记成 $\alpha=\beta+1$.

(3) 序数 α 是一个**极限序数**当且仅当没有这样的序数 β 存在, 即 α 不是一个后继序数.

例 1.20 (1) 空集是一个序数, 我们将用 0 来表示这一最小的序数; 0 是一个极限序数.

(2) ω 是一个序数, 而且 ω 中的每一个元素都是一个序数.

(3) ω 是一个 (非零) 极限序数.

(4) $\omega+1=\omega\cup\{\omega\}$ 是一个后继序数.

命题 1.18 设 α 是一序数. 那么, $\alpha\notin\alpha$, $\forall\gamma\,(\gamma\in\alpha\to\gamma\notin\gamma)$, 以及 $\beta=\alpha\cup\{\alpha\}$ 也是一个序数.

证明 首先, $\beta=\alpha\cup\{\alpha\}$ 是一个序数. 因为条件 $\varphi_0(\beta)$, $\varphi_1(\beta)$ 自然成立, 而如果 $x\subseteq\beta$ 非空, 要么 $x\cap\alpha$ 非空, 要么 $x=\{\alpha\}$, 从而必有 $\in$-极小元.

其次, 我们根据序数的定义来证明 $\forall\gamma\in\beta\,(\gamma\notin\gamma)$. 否则, 令

$$B=\{\gamma\in\beta\,|\gamma\in\gamma\},$$

这是序数 β 的一个非空子集. 令 $\gamma\in B$ 满足 $\gamma\cap B=\varnothing$. 因为 $\gamma\in B$, $\gamma\in\gamma$, 于是, $\gamma\in B\cap\gamma$, 这是一个矛盾. □

引理 1.9 若 α 是一个序数, $x\in\alpha$, 那么, x 必定是一个传递集合.

证明 这里, 我们用到序数定义中的三个条件: $\phi_0(\alpha)$, $\phi_1(\alpha)$ 以及 $\phi_2(\alpha)$.

假设序数 α 是一个反例, 即存在一个非传递的 $\beta\in\alpha$, 于是可以在 α 中取到一个 $\in$-极小的非传递的 β, 也就是, $\beta\in\alpha$, $\neg\phi_0(\beta)$, $\forall\gamma\,(\gamma\in\beta\to\phi_0(\gamma))$, 此 β 一定非空. 由非传递性, 取 $\eta\in\gamma\in\beta$ 满足 $\eta\notin\beta$. 由于 $\beta\in\alpha$ 以及 $\phi_0(\alpha)$, $\gamma\in\alpha$ 和 $\eta\in\alpha$, 且 $\phi_1(\alpha)$, η 和 β 一定是 $\in$-可比较的. 如果 $\eta=\beta$, 那么 $\gamma\in\beta=\eta\in\gamma$, 因为 $\phi_0(\gamma)$ 成立, 从而 $\gamma\in\gamma$; 如果 $\beta\in\eta$, 那么 $\gamma\in\beta\in\eta\in\gamma$, 同样地, 我们有 $\gamma\in\gamma$. 这就是矛盾. □

命题 1.19 若 α 是一序数, $\beta\in\alpha$, 则 β 也是一个序数.

证明 设 α 为一个序数. 第一, 根据引理 1.9, $\forall\beta\,(\beta\in\alpha\to\phi_0(\beta))$. 第二, 根据 $\phi_0(\alpha)$ 和 $\phi_1(\alpha)$, $\forall\beta\,(\beta\in\alpha\to\phi_1(\beta))$. 第三, 根据 $\phi_0(\alpha)$ 和 $\phi_2(\alpha)$, $\forall\beta\,(\beta\in\alpha\to\phi_2(\beta))$. □

引理 1.10 设 α 为一个序数. 又设 $A\subseteq\alpha$. 如果 A 是一个序数, 那么或者 $A=\alpha$ 或者 $A\in\alpha$.

证明 设 α 和 A 都是序数而且 $A\subseteq\alpha$, $A\neq\alpha$, 于是, $\alpha-A\neq\varnothing$. 取 $\beta\in\alpha-A$ 为 $\alpha-A$ 的 $\in$-极小元 (即 $\beta\cap(\alpha-A)=\varnothing$). 我们断言 $\beta=A$.

首先, 从 $A \subseteq \alpha = A \cup (\alpha - A)$, 以及 $\beta \in \alpha$, 我们得到 $\beta \subseteq A$.

现在我们欲证 $A \subseteq \beta$. 假设不然, 取 $\gamma \in A - \beta$ 为 $A - \beta$ 的 $\in$-极小元. 由于 $\gamma \in \alpha$, $\beta \in \alpha$, 它们是 $\in$-可比较的. 因为 $\gamma \notin \beta$, 只剩下两种可能: $\beta \in \gamma$ 或者 $\beta = \gamma$. 如果 $\beta \in \gamma$, 因为 A 是一个序数, 从 $\gamma \in A$ 我们得到 $\gamma \subseteq A$, 从而, $\beta \in A$, 同 $\beta \in \alpha - A$ 相矛盾; 如果 $\beta = \gamma$, 我们得到 $\beta \in A$, 也是一个矛盾. 因此, $A \subseteq \beta$.

这样, 我们得到 $A = \beta \in \alpha$. □

定理 1.50 (序数可比较性) 设 α 和 β 为两个序数. 则或者 $\alpha \in \beta$, 或者 $\beta \in \alpha$, 或者 $\alpha = \beta$, 三者必居其一而且只居其一.

证明 设 α 和 β 为两个序数. 令 $\gamma = \alpha \cap \beta$. 由序数的定义即知：两个序数之交必是一个序数. 由前面的引理, 我们必有或者 $\gamma = \alpha$, 或者 $\gamma \in \alpha$; 同样地, 或者 $\gamma = \beta$, 或者 $\gamma \in \beta$. 如果两个等式都成立, 那么 $\alpha = \beta$; 如果其中一个等式成立而另一个不成立, 那么或者 $\alpha \in \beta$ 或者 $\beta \in \alpha$; 最后, 我们断言两个等式中必然至少有一个成立：如其不然, 我们就有 $\gamma \in \alpha$ 和 $\gamma \in \beta$ 同时成立, 而这就意味着一个矛盾：$\gamma \in \alpha \cap \beta = \gamma$. □

定义 1.58 对于一个非空集合 x, 我们称一个集合 a 为 x 的 $\in$-**极小元**当且仅当 $a \in x$ 而且 $a \cap x = \varnothing$; 我们又称一个集合 a 为 x 的 $\in$-**最小元**当且仅当 $a \in x$ 而且

$$\forall y\,((y \in x \wedge y \neq a) \to a \in y).$$

定理 1.51 设 x 是一个序数的非空集合 (即 x 的每一个元素都是一个序数), 那么, x 必含有一个 $\in$-最小元, 记成 $\min(x)$.

证明 设 x 为一个序数的非空集合. 令 $\alpha \in x$, 如果 $\alpha \cap x = \varnothing$, 我们算是很幸运, 所以假定 $\alpha \cap x \neq \varnothing$. 取 $\beta \in \alpha \cap x$ 为 $\alpha \cap x \subseteq \alpha$ 的一个 $\in$-极小元. 由于 α 是一个序数, $\beta \subseteq \alpha$, 因此, $\beta \cap x = \beta \cap (\alpha \cap x) = \varnothing$, β 就是一个 x 的 $\in$-极小元. 因此, β 也就是 x 的 $\in$-最小元. □

定义 1.59 我们将用 Ord 来表示全体序数所组成的类; 而且用 $\alpha \in \mathrm{Ord}$ 来表示 “α 是一个序数”.

命题 1.20 设 x 是序数的一个非空集合, 那么

(1) x 是一个序数的充分必要条件就是 x 是传递的;

(2) $\bigcup x$ 是一个序数;

(3) $\forall \alpha \in x\ \alpha \subseteq \bigcup x$; 如果 γ 是一个序数, 并且 $\forall \alpha \in x\,(\alpha \subseteq \gamma)$, 那么 $(\bigcup x) \subseteq \gamma$.

证明 (1) 设 x 是序数的一个非空集合, 并且 x 是传递的. 由于 x 中的元素都是序数, 根据序数可比较定理 1.50, $\phi_1(x)$ 成立. 再由于 x 的任何一个非空子集都是一个序数的非空集合, 根据定理 1.51, x 的任何非空子集都有 $\in$-最小元. 所以 x 是一个序数.

(2) 设 x 为一个序数的集合. 令 $y=\bigcup x$. 可设 x 非空. 由于 y 是序数的一个集合, 根据 (1), 我们只需证明 y 是传递的, 即 $\phi_0(y)$ 成立. 任取 $a\in y$, 令 $\alpha\in x$ 满足 $a\in\alpha$. 于是 $a\subseteq\alpha$, 从而 $a\subseteq y$.

(3) 设 γ 是一个序数, 并且 $\forall\alpha\in x\ \alpha\subseteq\gamma$. 如果 x 中有一个最大元 α, 那么 $\alpha=\bigcup x$, 从而 $(\bigcup x)\subseteq\gamma$. 假设 x 中没有最大元. 设 $\beta\in\bigcup x$. 取 $\alpha\in x$ 满足 $\beta\in\alpha$. 那么, $\beta\in\gamma$. 所以 $(\bigcup x)\subseteq\gamma$. □

定义 1.60 设 x 是序数的一个非空集合. 令 $\sup(x)=\bigcup x$, 称 $\sup(x)$ 为 x 的**上确界**; 如果 x 中有最大元, 那么, 令 $\max(x)$ 为 x 中的最大元[16].

根据上面的命题, 我们可知存在任意大的极限序数.

定理 1.52 如果 α 是一个序数, 那么存在一个极限序数 $\gamma\ni\alpha$.

证明 根据定理 1.41, 给定序数 α, 令 W 满足要求: $\alpha\in W$ 以及

$$\forall a\in W\,\forall b\in W\,(a\cup\{b\}\in W).$$

令

$$X=\{\gamma\in W\mid\gamma\text{是一个序数}\},$$

于是, $\alpha\in X$, 并且, 如果 $\beta\in X$, 那么 $\beta\cup\{\beta\}\in X$. 令

$$\lambda=\bigcup X,$$

那么, λ 是一个极限序数, 并且, $\alpha\in\lambda$. □

因此 Ord 不是一个集合.

1.7.1 超限归纳法

定理 1.53 (最小序数原理) 设 $\phi(v)$ 为一个表达式. 如果存在一个具有性质 ϕ 的序数 α, 即

$$\exists\alpha\,(\phi(\alpha)\wedge\alpha\in\mathrm{Ord}),$$

那么一定存在一个具有这一性质 ϕ 的最小序数 α, 即

$$\exists\alpha\,(\phi(\alpha)\wedge\alpha\in\mathrm{Ord}\wedge\forall\beta\,(\beta\in\alpha\to\neg(\phi(\beta)))).$$

证明 假设 $\alpha\in\mathrm{Ord}$, 并且 $\varphi(\alpha)$. 令

$$B=\{\gamma\in\alpha+1\mid\varphi(\gamma)\}.$$

16 一个序数之集 x 有最大元当且仅当 $\sup(x)\in x$.

B 是序数的一个非空集合. 根据上面的定理 1.51, 令 $\gamma = \min(B)$. 此序数即为所求. □

定理 1.54 (超限归纳法原理一) 设 $\phi(v)$ 为一个表达式. 如果对于任意一个序数 α 我们都有

$$(\forall\beta\ (\beta \in \alpha \to \phi(\beta))) \to \phi(\alpha),$$

那么对于所有的序数 γ, 我们就都有 $\phi(\gamma)$.

证明 假设不然. 根据最小序数原理, 令 $\gamma \in \mathrm{Ord}$ 为 ϕ 之最小反例. 于是,

$$\forall\beta \in \gamma\ \phi(\beta).$$

根据给定条件, 此时必有 $\phi(\gamma)$, 可是 $\neg\phi(\gamma)$ 是 γ 的由来. □

定理 1.55 (超限归纳法原理二) 设 $\phi(v)$ 为一个表达式. 如果

(a) $\phi(0)$ 成立;

(b) $\forall\beta\ ((\beta \in \mathrm{Ord} \wedge \phi(\beta)) \to \phi(\beta + 1))$;

(c) 对于任意的一个极限序数 α, 都有

$$(\forall\beta\ (\beta \in \alpha \to \phi(\beta))) \to \phi(\alpha).$$

那么对于所有的序数 γ, 都有 $\phi(\gamma)$.

1.7.2 超限递归定义

设 α 为一序数, A 为一集合, 我们也称一个从 α 到 A 上的函数 $f : \alpha \to A$ 为 A 上的一个长度为 α 的序列, 或者称 f 为 A 上的一个 α-序列. 更一般地, 我们称定义在 α 上的函数为一个 α-序列, 或者一个长度为 α 的序列.

定义 1.61 我们称定义在一个序数上 (即其定义域为一个序数) 的一个函数为一个超限序列. 通常当一个超限序列的定义域为序数 α 时, 我们称其为一个长度为 α 的序列, 或者简称为一个 α-序列, 并且将其写成如下罗列其值域的形式: $\langle a_\xi : \xi \in \alpha\rangle$.

前面, 我们已经学习了如何递归地定义出长度为 ω 的序列. 那么, 我们能不能递归地得到任意长度 α 的序列呢?

现在, 我们引进一种依赖于映像存在原理和序数的构造集合的强有力的方法: 超限递归定义. 这一方法首先由 von Neumann 所提出.

定义 1.62 我们称 G 为一个类函数当且仅当存在一个可以用来定义 G 的满足如下要求的表达式 $\phi(u, v)$:

(1) $\forall x\ \exists y\ \phi(x, y)$;

(2) $\forall x\ \forall y\ \forall z\ ((\phi(x, y) \wedge \phi(x, z)) \to y = z)$;

(3) $\forall x\,\forall y\,(y = G(x) \leftrightarrow \phi(x,y))$.

定义 1.63 我们称 G 为一个类序列当且仅当存在一个可以用来定义 G 的满足如下要求的表达式 $\phi(u,v)$:

(1) $\forall x\,(x \in \mathrm{Ord} \to \exists y\,\phi(x,y))$;

(2) $\forall x\,(x \in \mathrm{Ord} \to \forall y\,\forall z\,((\phi(x,y) \wedge \phi(x,z)) \to y = z))$;

(3) $\forall x\,(x \in \mathrm{Ord} \to \forall y\,(y = G(x) \leftrightarrow \phi(x,y)))$.

我们也容许我们使用如下的类序列形式: $\langle a_\xi : \xi \in \mathrm{Ord}\rangle$.

定理 1.56 (超限递归定义) 设 G 为一个类函数. 那么如下的表达式 $\phi_G(u,v)$ 是一个函数定义表达式:

$$\phi_G(\alpha,x) \leftrightarrow (\alpha \in \mathrm{Ord} \wedge \exists f\,(\sigma(f,\alpha) \wedge \eta_0(f,\alpha) \wedge \eta_1(f,x))),$$

其中,

(i) $\sigma(f,\alpha) \leftrightarrow f$ 是一个长度为 α 的序列;

(ii) $\eta_0(f,\alpha) \leftrightarrow \sigma(f,\alpha) \wedge \forall \xi\,(\xi \in \alpha \to (f(\xi) = G(f \restriction \xi)))$;

(iii) $\eta_1(f,x) \leftrightarrow x = G(f)$;

而且它定义了满足递归定义要求

$$\forall \alpha\,(\alpha \in \mathrm{Ord} \to (F(\alpha) = G(F \restriction \alpha)))$$

的唯一的类序列 F.

证明 我们先来证明表达式 $\phi_G(u,v)$ 是一个泛函定义式. 为此, 设 α 为一序数. 又设 f 和 g 分别是两个 α-序列而且都满足如下要求:

$$\forall \xi\,(\xi \in \alpha \to (f(\xi) = G(f \restriction \xi))),$$

$$\forall \xi\,(\xi \in \alpha \to (g(\xi) = G(g \restriction \xi))).$$

那么由归纳法我们立即得到 $\forall \xi\,(\xi \in \alpha \to f(\xi) = g(\xi))$, 因此 $f = g$.

在这里, 我们实际上先证明了如下的表达式 $\varphi_G(\alpha,f)$ 是一个泛函定义式:

$$\varphi_G(\alpha,f) \leftrightarrow \alpha \in \mathrm{Ord} \wedge \sigma(f,\alpha) \wedge \eta_0(f,\alpha),$$

而且, 如果 $\alpha \in \gamma$, $\varphi_G(\alpha,f)$ 和 $\varphi_G(\gamma,g)$ 都成立, 那么, 我们必有 $f = g \restriction \alpha$.

现在假设 $\phi_G(\alpha,x)$ 和 $\phi_G(\alpha,y)$ 都成立, 分别取两个满足

$$\eta_0(f,\alpha) \wedge \eta_1(f,x)\ \text{和}\ \eta_0(g,\alpha) \wedge \eta_1(g,y)$$

的 α-序列 f 和 g. 由前面的讨论我们知道 $f = g$. 因此,

$$x = G(f) = G(g) = y.$$

这就证明了 $\phi_G(u, v)$ 是一个泛函定义式.

我们现在来证明：对于任何一个序数 α, 都存在一个满足如下要求的 α-序列 f：

$$\forall \xi\ (\xi \in \alpha \to (f(\xi) = G(f \upharpoonright \xi))).$$

假定 $\alpha = \beta + 1$, 而且 f_β 是一个满足要求的 β- 序列. 我们定义

$$f_\alpha = f_\beta \cup \{\langle \beta, G(f_\beta)\rangle\}.$$

那么, f_α 就是一个满足要求的 α-序列. 现在假设 α 是一个非零极限序数. 而且对于任意的 $\xi \in \alpha$, 我们都有满足要求的 ξ- 序列 f_ξ. 也就是说, 对任意的 $\xi \in \alpha$, $\varphi_G(\xi, f_\xi)$ 成立. 由映像存在原理, 所有这些 f_ξ $(\xi \in \alpha)$ 组成一个集合 T：

$$T = \{t \mid \exists \xi\ (\xi \in \alpha \wedge \varphi_G(\xi, t))\}.$$

由前面的讨论可知 T 是一个和谐的函数系统. 于是, 令 $f_\alpha = \bigcup T$, 那么, f_α 就是一个满足要求的 α-序列.

我们用表达式 $\phi_G(u, v)$ 来定义类序列 F: 对于任意的 x, y,

$$y = F(x) \leftrightarrow x \in \mathrm{Ord} \wedge \phi_G(x, y).$$

□

作为超限递归定义定理 1.56 的一个特例, 也作为 ω 上的递归定义 (定理 1.12) (或者其推论 1.2) 的一个自然推广, 我们有如下递归定义定理：

定理 1.57 *设 θ 是一个非零极限序数, A 是一个非空集合. 令*

$$S = A^{<\theta} = \bigcup\{A^\alpha \mid \alpha \in \theta\}$$

为 A 上的所有长度小于 θ 的序列之集合. 设 $g : S \to A$. 那么, 存在唯一的满足下述递归定义等式的长度为 θ 的序列 $f : \theta \to A$:

$$\forall \alpha \in \theta\, (f(\alpha) = g(f \upharpoonright_\alpha)).$$

证明 给定 θ, A, S 和函数 g 如定理之条件. 令

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{如果 } x \in S, \\ \varnothing & \text{如果 } x \notin S. \end{cases}$$

此 G 是一个类函数: $(\forall x\, \exists y\, (y = G(x))) \wedge (\forall x \forall y \forall z\, ((y = G(x) \wedge z = G(x)) \to z = y))$. 依据此类函数 G, 超限递归定义定理为我们提供唯一的满足下述递归定义等式的类序列 F:

$$\forall \alpha \in \mathrm{Ord}\, F(\alpha) = G(F\restriction_{\alpha}).$$

由此, 令 $f = F\restriction_{\theta}$ 即为所求. □

在许多应用之中, 我们还需要超限递归定义定理的参数形式.

对于一个二元类函数 $F(z, x)$, 我们用 F_z 来表示固定参数 z 之后所得到的一元类函数: $F_z(x) = F(z, x)$. 如果 F 是由三元泛函定义式 $\varphi(z, x, y)$ 所定义的类函数, A 是一个集合, 那么,

$$F_z[A] = \{y \mid \exists x \in A\, \varphi(z, x, y)\}; \quad F_z\restriction_{A} = \{(x, y) \mid x \in A\, \varphi(z, x, y)\}.$$

定理 1.58 设 G 是一个二元类函数. 令 $\varphi_G(z, x, y)$ 当且仅当

(1) 或者 x 是一个序数, 并且存在一个满足如下要求的定义在 $x+1$ 上的序列 t:

$$(\forall \alpha \in x+1\, t(\alpha) = G(z, t\restriction_{\alpha})) \wedge y = t(x);$$

(2) 或者 x 不是序数而 $y = \varnothing$.

那么, φ_G 定义出唯一的满足下述递归定义等式的类函数 F:

$$\forall z\, \forall \alpha \in \mathrm{Ord}\, F(z, \alpha) = G(z, F_z\restriction_{\alpha}).$$

证明 (练习.) □

在递归定义定理的实际应用中, 它的一种特殊情形, 如下分情形定义定理, 有着广泛用途.

定理 1.59 设 G_1, G_2, G_3 为三个一元类函数. 令 G 为下述分情形定义的类函数:

$$G(x) = \begin{cases} G_1(\varnothing) & \text{如果 } x = \varnothing, \\ G_2(x(\alpha)) & \text{如果 } x \text{ 是一个定义在序数 } \alpha+1 \text{ 上的函数}, \\ G_3(x) & \text{如果 } x \text{ 是一个定义在非零极限序数上的函数}, \\ \varnothing & \text{如果 } x \text{ 并非上面三种情形之一}, \end{cases}$$

那么, 后面的表达式 $\varphi_G(x, y)$ 是一个泛函定义式: $\varphi_G(x, y)$ 当且仅当

或者, x 是一个序数, 且存在一个定义在 $x+1$ 上的满足下述递归定义等式的序列 t:

$$\forall\alpha\in x+1\, t(\alpha)=G(t\restriction_{\alpha}),\ \text{以及}\ y=t(x),$$

或者 x 不是序数, 且 $y=\varnothing$;

并且, $\varphi_G(x,y)$ 定义出一个满足如下递归定义等式的类序列 F:

(1) $F(0)=G_1(\varnothing)$;

(2) $\forall\alpha\in\mathrm{Ord}\ (F(\alpha+1)=G_2(F(\alpha)))$;

(3) $\forall\alpha\in\mathrm{Ord}\ ((0\in\alpha=\bigcup\alpha)\to(F(\alpha)=G_3(F\restriction_{\alpha})))$.

1.7.3　集合累积层次

作为例子, 我们应用递归定义定理来定义集合论论域的累积层次序列

$$\langle V_\alpha\mid\alpha\in\mathrm{Ord}\rangle.$$

定义 1.64　我们定义如下的类序列 $\langle V_\alpha:\alpha\in\mathrm{Ord}\rangle$:

$V_0=\varnothing$;

$V_{\alpha+1}=\mathfrak{P}(V_\alpha)$;

$V_\lambda=\bigcup\{V_\alpha\mid\alpha\in\lambda\}$, 这里 λ 是一个极限序数.

$V^*=\bigcup\{V_\alpha\mid\alpha\in\mathrm{Ord}\}$.

我们称这一个类序列为集合的**累积层次**.

这由上面的定理 1.59 直接得到.

我们也可以直接验证我们的定义是合理的. 考虑这样一个类函数: $G(\varnothing)=\varnothing$; 如果 x 不是一个序列, 那么 $G(x)=\mathfrak{P}(x)$; 如果 x 是一个长度为一个非零极限序数的序列, 那么 $G(x)=\bigcup\mathrm{rng}(x)$; 如果 x 是一个长度为一个后继序数的序列, 那么 $G(x)=\mathfrak{P}(x(\max(\mathrm{dom}(x))))$.

可以验证: $\forall\alpha\ (\alpha\in\mathrm{Ord}\to V_\alpha=G(V\restriction\alpha))$.

我们将这一验证工作留作练习.

V^* 也是一个类, 不是一个集合.

引理 1.11　(1) 每一个 V_α 都是传递的;

(2) 如果 $\beta\in\alpha$, 那么 $V_\beta\in V_\alpha$ 以及 $\alpha\subseteq V_\alpha$;

(3) V^* 是一个传递类, 并且 $\mathrm{Ord}\subset V^*$.

证明　应用关于序数 α 的归纳法, 我们来同时证明 (1) 和 (2) 对于 α 成立.

当 $\alpha=0$ 时, (1) 和 (2) 自然成立.

假设 $\alpha=\gamma+1$ 并且 (1) 和 (2) 对于所有小于等于序数 γ 都成立.

先来证明 (1) 对于 α 成立. 根据定义, $V_\alpha = \mathfrak{P}(V_\gamma)$. 设 $a \in V_\alpha$. 那么 $a \subseteq V_\gamma$. 如果 $b \in a$, 那么 $b \in V_\gamma$. 由于 V_γ 是传递的, $b \subseteq V_\gamma$. 于是, $b \in \mathfrak{P}(V_\gamma)$. 从而, V_α 是传递的. 即 (1) 关于 $\alpha = \gamma + 1$ 成立.

再来证明 (2) 关于 α 成立. 首先, 因为 (2) 关于 γ 成立, $\gamma \subseteq V_\gamma$, 所以 $\gamma \in V_{\gamma+1}$ 以及

$$\alpha = \gamma \cup \{\gamma\} \subseteq V_{\gamma+1} = V_\alpha.$$

其次, 设 $\beta < \alpha$. 那么 $\beta \leqslant \gamma$. 如果 $\beta = \gamma$, 那么 $V_\beta \in V_\alpha$; 如果 $\beta < \gamma$, 那么根据归纳假设, $V_\beta \in V_\gamma \subset V_\alpha$.

现假设 $\alpha > 0$ 是一个极限序数, 并且对于每一个小于 α 的序数 γ, (1) 和 (2) 关于 γ 都成立.

先来证明 V_α 是传递的. 设 $a \in V_\alpha$. 令 $\gamma < \alpha$ 为满足要求 $a \in V_\gamma$ 的一个序数. 那么

$$a \subset V_\gamma \subset V_\alpha.$$

所以 (1) 关于 α 成立.

其次, 如果 $\gamma < \alpha$, 根据归纳假设, $\gamma \subset V_\gamma$, 从而 $\gamma \in V_{\gamma+1} \subset V_\alpha$. 于是, $\alpha \subset V_\alpha$. 再者, 如果 $\beta < \alpha$, 那么 $V_\beta \in V_{\beta+1} \subset V_\alpha$. 所以 (2) 关于 α 成立.

(3) 由 (1) 和 (2) 以及定义即得. □

定理 1.60 设 $\kappa \geqslant \omega$ 为一个极限序数. 那么

(1) 如果 $\{a, b, A, B\} \subset V_\kappa$, 那么 $\{\{a, b\}, (a, b), A \times B\} \subset V_\kappa$;

(2) 如果 $A \in V_\kappa$, 那么 $\bigcup A \in V_\kappa$;

(3) 如果 $A \in V_\kappa$, 那么 $\mathfrak{P}(A) \in V_\kappa$;

(4) 如果 $\{A, a_1, \cdots, a_m\} \subset V_\kappa$, $\varphi(y, x_1, \cdots, x_m)$ 是一个彰显全部自由变元的集合论语言的表达式,

$$B = \{a \in A \mid \varphi[a, a_1, \cdots, a_m]\},$$

那么 $B \in V_\kappa$.

证明 (1) 设 $\{a, b, A, B\} \subset V_\kappa$. 令 $\alpha < \kappa$ 满足要求 $\{a, b, A, B\} \subset V_\alpha$. 那么

(a) $\{a, b\} \in V_{\alpha+1}$;

(b) $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} \in V_{\alpha+2}$;

(c) $A \cup B \subset V_\alpha$ 以及 $A \times B \subset V_{\alpha+3}$ 和 $A \times B \in V_{\alpha+4}$.

(2) 设 $A \in V_\kappa$. 令 $\alpha < \kappa$ 满足要求 $A \in V_\alpha$. 那么, $A \subset V_\alpha$ 以及 $\bigcup A \subset V_\alpha$; 从而

$$\bigcup A \in V_{\alpha+1}.$$

(3) 设 $A \in V_\kappa$. 令 $\alpha < \kappa$ 满足要求 $A \in V_\alpha$. 那么, $A \subset V_\alpha$ 以及 $\mathfrak{P}(A) \subset \mathfrak{P}(V_\alpha)$; 从而

$$\mathfrak{P}(A) \in V_{\alpha+2}.$$

(4) 事实上, 如果 $\{A, a_1, \cdots, a_m\} \subset V_\alpha$, $\varphi(y, x_1, \cdots, x_m)$ 是一个彰显全部自由变元的集合论语言的表达式,

$$B = \{a \in A \mid \varphi[a, a_1, \cdots, a_m]\},$$

那么 $B \in V_{\alpha+1}$. 由此即得 (4). □

引理 1.12 如果 A 是一个非空集合, 并且

$$\forall a \in A\, \exists \alpha \in \mathrm{Ord}\,(a \in V_\alpha),$$

那么, $A \in V^*$.

证明 考虑表达式 $\psi(u, \alpha)$:

$$\psi(u, \alpha) \leftrightarrow (\alpha \in \mathrm{Ord} \wedge (\exists \beta \in \mathrm{Ord}\,(u \in V_\beta)) \to \alpha = \min\{\beta \in \mathrm{Ord} \mid u \in V_\beta\}),$$

这是一个泛函定义式.

根据关于集合 A 的假设, $\forall a \in A\, \exists \alpha\, \psi(a, \alpha)$. 根据映像存在原理, 下述概括式定义了一个集合:

$$X = \{\alpha \in \mathrm{Ord} \mid \exists a \in A\, \psi(a, \alpha)\}.$$

令 $\gamma = \bigcup\{\alpha + 1 \mid \alpha \in X\}$. 那么, γ 是一个非零极限序数, 并且, $A \subseteq V_\gamma$. 由此, $A \in V_{\gamma+1}$. □

定义 1.65 $V = \{x \mid x = x\}$. 称 V 为集合论的论域.

要注意的是, 我们的论域是一个类, 不是一个集合, 它包含了我们所关注的对象 —— 集合 —— 的全体.

问题 1.2 由我们的累积层次的定义得知 V^* 中的任何一个元素都是我们论域 V 中的一个集合. 现在的问题是: 在 V^* 之外还有没有我们论域中的集合存在呢? 也就是, 是否一定 $V = V^*$?

定理 1.61 $V = V^*$, 也就是说, $\forall x\, \exists \alpha \in \mathrm{Ord}\,(x \in V_{\alpha+1})$.

证明 为证明 $V = V^*$, 只需证明如果 $x \in V$, 那么 $x \in V^*$.

假设 $x \in V$. 令 $M = \mathcal{TC}(x)$ 为 x 的传递闭包. 我们来证明

$$\forall a \in M\, \exists \beta \in \mathrm{Ord}\,(a \in V_\beta).$$

假设不然, 如下集合 $Y \subseteq M$ 非空:

$$Y = \{a \in M \mid \forall \beta \in \mathrm{Ord}\, a \notin V_\beta\}.$$

根据 $\in$-极小原理, 令 $a \in Y$, 且 $a \cap Y = \varnothing$. 由于 M 是传递集合, $a \subset M$. 所以

$$\forall b \in a \, \exists \beta \in \mathrm{Ord}\,(b \in V_\beta).$$

由此, 根据上面的讨论, $\exists \beta \in \mathrm{Ord}\,(a \in V_\beta)$. 这是一个矛盾.

于是, $\exists \alpha \in \mathrm{Ord}\,(M \in V_\alpha)$. 对于这样的 $\alpha \in \mathrm{Ord}$, $x \subseteq M \subseteq V_\alpha$, 因此, $x \in V_{\alpha+1}$. □

定义 1.66 对于任意一个 $x \in V$, 我们定义 x 的**秩**, 记成 $\mathrm{RK}(x)$, 为满足条件 $x \in \mathrm{V}_{\alpha+1}$ 的最小的序数 α.

回顾一下后继函数 $\mathbf{S}$ 是由等式

$$\mathbf{S}(a) = a \cup \{a\}$$

所定义的函数. 下面我们来证明一个有趣的不等式和等式.

命题 1.21 (1) 如果 $b \in a$, 那么 $\mathrm{RK}(b) < \mathrm{RK}(a)$;

(2) $\mathbf{S} \circ \mathrm{RK} = \mathrm{RK} \circ \mathbf{S}$, 即 $\forall a\,[\mathbf{S}(\mathrm{RK}(a)) = \mathrm{RK}(\mathbf{S}(a))]$.

证明 (1) 设 $b \in a$, 以及 $\alpha = \mathrm{RK}(a), \beta = \mathrm{RK}(b)$. 那么 $a \in V_{\alpha+1}$, 从而

$$b \in a \subset V_\alpha$$

以及 $\beta + 1 = \mathrm{RK}(b) + 1 \leqslant \alpha$. 于是, $\beta < \alpha$.

(2) 首先, $\mathbf{S}(\mathrm{RK}(a)) = \mathrm{RK}(a) + 1$; 其次, 由于 $a \in V_{\mathrm{RK}(a)+1}$, $a \subset V_{\mathrm{RK}(a)}$, 并且 $a \notin V_{\mathrm{RK}(a)}$. 因此,

$$\mathbf{S}(a) = a \cup \{a\} \subset V_{\mathrm{RK}(a)+1} \wedge \mathbf{S}(a) \in V_{(\mathrm{RK}(a)+1)+1}.$$

于是,

$$\mathrm{RK}(\mathbf{S}(a)) \leqslant \mathrm{RK}(a) + 1 = \mathbf{S}(\mathrm{RK}(a)).$$

另一方面, 由 (1), $\mathrm{RK}(a) < \mathrm{RK}(\mathbf{S}(a))$; 所以,

$$\mathbf{S}(\mathrm{RK}(a)) = \mathrm{RK}(a) + 1 \leqslant \mathrm{RK}(\mathbf{S}(a)).$$

综合起来, 就有 $\mathbf{S}(\mathrm{RK}(a)) = \mathrm{RK}(\mathbf{S}(a))$. □

1.8 秩　　序

1.8.1 秩序集

定义 1.67 对于任意两个序数 α 和 β, 我们定义

$$\alpha < \beta \leftrightarrow \alpha \in \beta,$$

我们也定义

$$\alpha \leqslant \beta \leftrightarrow (\alpha < \beta \vee \alpha = \beta).$$

由关于序数的讨论, 我们知道这就定义了序数之间的一种线性关系: 任给两个序数, 或者它们相等, 或者其中的一个小于另外一个, 而且三者必居其一. 同时我们也知道任给一个非空的序数的集合, 它一定有一个相对于这个小于关系的最小元素. 更进一步地, 每一个序数都恰好是那些比它小的序数的全体所组成的集合. 这些都是序数所具有的特殊的良好的特性. 如果我们只考虑前面两种特性的话, 任何一个无穷序数都会带上很多种彼此完全不相同的但具有相同特性的 “序”. 现在我们就来探讨这样的序.

例 1.21 我们如下重新定义 ω 上的一种序 $<_0$:

(1) $\forall n\,(n \in \omega \to n = 0 \vee n <_0 0)$;

(2) $\forall n\,\forall m\,(n \in \omega \wedge m \in \omega \wedge n \neq 0 \wedge m \neq 0 \to (n <_0 m \leftrightarrow n < m))$.

很容易验证如下两大特性: 任给两个自然数, 或者它们相等, 或者其中一个在 $<_0$ 之下小于另外一个; 任给自然数的一个非空子集, 它必有一个相对于 $<_0$ 的最小元素. 但是, 0 在这一序下成为最大元素. 所以, 这两个序 $<$ 和 $<_0$ 是完全不同的序.

定义 1.68 我们称一个线性有序集 $(W, <)$ 为一个**秩序集**[17] 当且仅当 W 的每一个非空子集 x 都有一个 $<$- 最小元素 (即 $\exists a\,(a \in x \wedge \forall b\,(b \in x \to a = b \vee a < b))$), 并且称 $<$ 为 W 的一个**秩序**[18].

我们说一个集合是**可秩序化的**当且仅当在它之上存在一个秩序.

对于一个秩序集 $(W, <)$ 而言, 我们说一个集合 x 是它的一个**前段**当且仅当

$$\exists u\,(u \in W \wedge \forall y\,(y \in x \leftrightarrow y \in W \wedge y < u)).$$

对于一个秩序集 $(W, <)$ 和 $u \in W$, 我们用 $W[u] = \{y \in W \mid y < u\}$ 来记这样一个前段.

例 1.22 设 x 是序数的一个非空集合. 那么 $(x, <)$ 是一个秩序集.

问题 1.3 (可秩序化问题) 对于任意给定的一个集合 X, 是否一定有 X 上的一个秩序存在呢? 换句话说, 是否每一个集合都可秩序化?

定义 1.69 设 $(A, <_A)$ 和 $(B, <_B)$ 为两个线性有序集, $f : A \to B$. 称 f 是从 $(A, <_A)$ 到 $(B, <_B)$ 的一个**单调递增**(单增) 映射 (也称**保序映射**) 当且仅当

$$\forall a\,\forall b\,((a \in A \wedge b \in A) \to (a <_A b \leftrightarrow f(a) <_B f(b))).$$

我们说 f 是从 $(A, <_A)$ 到 $(B, <_B)$ 的一个**单调递减**(单减) 映射 (也称**倒序映**

17 well-ordered set, 又称为良序集.

18 well-ordering, 又称为良序.

射) 当且仅当

$$\forall a\,\forall b\,((a \in A \wedge b \in A) \rightarrow (a <_A b \leftrightarrow f(b) <_B f(a))).$$

我们说 f 是从 $(A, <_A)$ 到 $(B, <_B)$ 上的一个**同构映射**当且仅当 f 是从 $(A, <_A)$ 到 $(B, <_B)$ 的一个单增映射而且 f 是一个满射. 特别地, 一个从 $(A, <_A)$ 到 $(A, <_A)$ 上的同构映射被称为**自同构映射**.

我们说两个线性有序集 $(A, <_A)$ 和 $(B, <_B)$ 是**同构**的, 记成 $(A, <_A) \cong (B, <_B)$, 当且仅当它们之间存在一个同构映射.

我们说线性有序集 $(A, <_A)$ 可以**嵌入**到线性有序集 $(B, <_B)$ 中当且仅当存在一个从 $(A, <_A)$ 到 $(B, <_B)$ 的一个保序映射.

我们先来看几个有关秩序集的例子.

例 1.23 $(\omega, <)$, $(\omega + 1, <)$ 和 $(\omega, <_0)$ 就是三个秩序集. 后面两个同构. 第一个同构于后面的一个前段.

例 1.24 设 α 为一个大于或等于 ω 的 (极限) 序数. 令 $[\alpha]^{<\omega}$ 为 α 的有限子集合所组成的集合, 对于任意的 $x, y \in [\alpha]^{<\omega}$, 定义

$$x < y \iff x \neq y \wedge \max(x \triangle y) \in y,$$

那么, $([\alpha]^{<\omega}, <)$ 是一个秩序集.

证明 (练习.) □

现在我们来探讨秩序集的一些基本特性.

引理 1.13 设 $(W, <)$ 是一个秩序集, 又设 $f : (W, <) \rightarrow (W, <)$ 是一个单增映射, 那么对于所有的 $x \in W$ 我们都有 $x \leqslant f(x)$.

证明 若其不然, 则 $X = \{a \in W \mid f(a) < a\}$ 必是一个非空集合. 因此, X 必有一个 $<$-最小元素 z. 令 $w = f(z)$. 那么, $w < z$, 从而 $f(w) < f(z)$. 于是, $f(w) < w$. 但是由最小性, $w \notin X$, 这是一个矛盾. □

定理 1.62 (刚性定理) (1) 任何一个秩序集上都只存在唯一的自同构映射, 即它上的恒等映射.

(2) 任何两个相互同构的秩序集之间只存在唯一的同构映射.

(3) 没有一个秩序集会和它的一个前段同构.

证明 假设 (3) 不成立. 我们来推出矛盾. 故设 $(W, <)$ 和 $u \in W$ 组成一个反例. 令 $x = \{y \in W \mid y < u\}$ 为由 u 所决定的 W 的一个线段. 令 $f : (W, <) \rightarrow (x, <)$ 为一个同构. 那么 $f : (W, <) \rightarrow (W, <)$ 是一个单增映射, 而且 $f(u) < u$. 矛盾. □

定理 1.63 (秩序可比较定理) 设 $(W_1, <_1)$ 和 $(W_2, <_2)$ 为两个秩序集. 那么如下三种情形必有而且只有一种成立:

(1) $(W_1, <_1) \cong (W_2, <_2)$;

(2) $\exists u\ (u \in W_2 \wedge (W_1, <_1) \cong (W_2[u], <_2))$;

(3) $\exists u\ (u \in W_1 \wedge (W_1[u], <_1) \cong (W_2, <_2))$.

证明 设 $(W_1, <_1)$ 和 $(W_2, <_2)$ 为两个秩序集. 令

$$f = \{(x, y) \in W_1 \times W_2 \mid (W_1[x], <_1) \cong (W_2[y], <_2)\}.$$

由上面的刚性定理可知 f 是一个单值函数. 如果 $(x, y) \in f$, $a \in W_1[x]$, 那么必有唯一的 $b \in W_2[y]$ 满足 $(a, b) \in f$(取 $h : (W_1[x], <_1) \to (W_2[y], <_2)$ 为一个同构, 令 $b = h(a)$). 同样地, 对 $b \in W_2[y]$, 必有唯一的 $a \in W_1[x]$ 满足 $(a, b) \in f$. 于是

$$f : (\mathrm{dom}(f), <_1) \to (\mathrm{rng}(f), <_2)$$

是一个同构.

如果 $\mathrm{dom}(f) = W_1$ 而且 $\mathrm{rng}(f) = W_2$, 那么, 我们有 (1).

如果 $\mathrm{dom}(f) \neq W_1$, 那么必有 $\mathrm{rng}(f) = W_2$ 而且 $\mathrm{dom}(f)$ 必是 W_1 的一个线段. 令 x_0 为 $W_1 - \mathrm{dom}(f)$ 的 $<_1$-最小元素. 那么, $\mathrm{dom}(f) = W_1[x_0]$. 如果 $\mathrm{rng}(f) \neq W_2$, 令 y_0 为 $W_2 - \mathrm{rng}(f)$ 的 $<_2$-最小元素, 那么, $(x_0, y_0) \in f$. 矛盾. 因此, $\mathrm{rng}(f) = W_2$. 我们有 (3).

如果 $\mathrm{dom}(f) = W_1$ 而且 $\mathrm{rng}(f) \neq W_2$, 令 y_0 为 $W_2 - \mathrm{rng}(f)$ 的 $<_2$-最小元素, 那么我们有 $\mathrm{rng}(f) = W_2[y_0]$, 从而 (2) 成立. □

定理 1.64 (表示定理) *每一个秩序集必然唯一地同构于一个序数.*

证明 设 $(W, <)$ 为一个秩序集. 考虑如下的表达式 $\theta(u, v)$:

$$\theta(x, \alpha) \leftrightarrow (x \in W \wedge \alpha \in \mathrm{Ord} \wedge (W[x], <) \cong (\alpha, \in)).$$

这一表达式是一个泛函定义式.

首先, 我们来证明: $\forall x\ (x \in W \to \exists \alpha\ (\alpha \in \mathrm{Ord} \wedge (W[x], <) \cong (\alpha, \in)))$.

若其不然, 令 $x_0 \in W$ 为 $<$ 最小的反例. 于是, 对任意的 $x \in W[x_0]$ 都有一个序数 α_x 满足要求

$$(W[x], <) \cong (\alpha_x, \in).$$

将映像存在原理用到泛函定义式 $\theta(u, v)$ 以及集合 $W[x_0]$ 上, 我们得到

$$y = \{\alpha \mid \exists x\ (x \in W[x_0] \wedge \theta(x, \alpha))\}$$

是一个集合. 事实上, y 还是一个传递集合. 从而, y 是一个序数. 更重要的是

$$(W[x_0], <) \cong (y, \in),$$

这就是一个矛盾.

再由映像存在原理, 我们得到

$$y = \{\alpha \mid \exists x\ (x \in W \wedge \theta(x,\alpha))\}$$

是一个序数, 而且 $(W,<) \cong (y,\in)$. □

定义 1.70 对于一个秩序集合 $(W,<)$ 而言, 我们称序数 α 为它的**长度**或者**序型**, 记成 $\alpha = \mathrm{ot}(W,<)$, 当且仅当它与 $(\alpha,<)$ 同构. 如果 W 是一个序数的集合, 并且 $<$ 就是序数的自然序, 那么, 就简单地记成 $\mathrm{ot}(W)$.

例 1.25 如果 α 是一个序数, $f:\alpha \to \mathrm{Ord}$ 是一个严格单增函数, 那么

$$(\mathrm{rng}(f),<)$$

是一个秩序集, 并且 $\alpha = \mathrm{ot}(\mathrm{rng}(f))$, f 是 α 与 $\mathrm{rng}(f)$ 的同构映射.

定理 1.65 对于给定的一个集合 X, X 可秩序化的充分必要条件是存在一个从 X 到某一个序数上的双射.

证明 必要性由秩序表示定理给出. 充分性是因为任何一个从 X 到某一个序数上的双射都自然诱导出 X 上的一个秩序. □

定理 1.66 (1) 如果 x 是一个有限集合, 那么 x 必可秩序化.

(2) 如果 $(x,<_x)$ 和 $(y,<_y)$ 是两个有限线性有序集, 那么它们同构的充分必要条件是在 x 和 y 这两个集合之间存在一个双射.

(3) 如果 $(x,<)$ 是一个有限的线性有序集, 那么 $(x,<)$ 必是一个秩序集.

证明留作练习.

1.8.2 序数集合与序数函数

引理 1.14 设 X 是一个非空的序数之集.

(1) 如果 $f: X \to \mathrm{ot}(X)$ 是它们之间的同构映射, 那么

$$\forall \alpha \in X \left(\begin{array}{l} (f(\alpha) = \{f(\beta) \mid \beta \in \alpha \cap X\} = f[\alpha \cap X]) \\ = \{\mathrm{ot}(\beta \cap X) \mid \beta \in \alpha \cap X\} = \mathrm{ot}(\alpha \cap X) \end{array} \right).$$

(2) 如果 $f: X \to \mathrm{ot}(X)$ 满足下述递归定义等式

$$\forall \alpha \in X\ (f(\alpha) = \{f(\beta) \mid \beta \in \alpha \cap X\} = f[\alpha \cap X]),$$

那么, f 是 X 与 $\mathrm{ot}(X)$ 的同构映射, 并且

$$\forall \alpha \in X\ \ (f(\alpha) = \mathrm{ot}(\alpha \cap X) = \{\mathrm{ot}(\beta \cap X) \mid \beta \in \alpha \cap X\}).$$

证明 (1) 根据秩序刚性定理, 我们有

$$\forall \alpha \in X\ (f\restriction_{\alpha \cap X}: \alpha \cap X \cong \mathrm{ot}(\alpha \cap X)).$$

因此, $\forall\alpha\in X\ (f[\alpha\cap X]=\mathrm{ot}(\alpha\cap X))$.

(2) 假设 f 满足递归定义等式. 如果 $\beta\in\alpha$, 并且 $\{\beta,\alpha\}\subseteq X$, 那么,

$$f(\beta)\in f(\alpha).$$

所以, f 保持 $\in$-关系.

如果 $\alpha\in X$ 以及 $\gamma\in f(\alpha)$, 那么必有 $\beta\in\alpha\cap X$ 来实现 $\gamma=f(\beta)$. 因此, $\forall\alpha\in X\ f\restriction_{\alpha\cap X}\colon\alpha\cap X\to f(\alpha)$ 是一个同构映射; 从而,

$$\forall\alpha\in X\ f(\alpha)=\mathrm{ot}(\alpha\cap X).$$

另外, 如果 $\gamma\in\mathrm{ot}(X)$, 令 $\beta\in X$ 满足 $\gamma=\mathrm{ot}(\beta\cap X)$, 那么 $f(\beta)=\gamma$. 因此, f 是一个满射, 从而 f 是一个同构. □

定义 1.71 对于一个序数的集合 X 而言, 称映射

$$X\ni\alpha\mapsto\mathrm{ot}(\alpha\cap X)=\{\mathrm{ot}(\beta\cap X)\mid\beta\in\alpha\cap X\}$$

为 X 的**雪崩映射**, 而称这个雪崩映射的逆映射为 X 的**自然列表**.

命题 1.22 设 A 为序数的一个集合, $\tau:\mathrm{ot}(A)\to A$ 为 A 的自然列表, $\alpha<\mathrm{ot}(A)$. 那么 $\alpha=\mathrm{ot}(\tau(\alpha)\cap A)$ 而且 $\tau\restriction\alpha$ 是 $\tau(\alpha)\cap A$ 的自然列表.

证明 若 $\eta<\gamma<\beta<\mathrm{ot}(A)$, 那么 $\tau(\eta)<\tau(\gamma)<\tau(\beta)$; 又若 $\xi\in A\cap\tau(\beta)$, 那么必有唯一的 $\gamma<\beta$ 是方程 $\xi=\tau(x)$ 的解. 所以,

$$\tau\restriction\beta:\beta\to A\cap\tau(\beta)$$

是一个同构. 因此, $\beta=\mathrm{ot}(A\cap\tau(\beta))$ 而且 $\tau\restriction\beta$ 是 $A\cap\tau(\beta)$ 的自然列表. □

序数集合的自然列表的递归计算

给定一个非空的序数的集合 A, 令 $g:\mathfrak{P}(A)\to A\cup\{A\}$ 为如下定义的函数: 对于 $X\subseteq A$,

$$g(X)=\begin{cases}A & \text{当 } X=\varnothing \text{ 时},\\ \min(X) & \text{当 } X\neq\varnothing \text{ 时}.\end{cases}$$

对于 $\alpha\in\mathrm{Ord}$, 令 $f(\alpha)=g\left(A-\mathrm{rng}(f\restriction_\alpha)\right)$, 令

$$\gamma=\min(\{\eta\mid f(\eta)=A\}),$$

那么, $f\restriction_\gamma\colon\gamma\to A$ 就是 A 的自然列表.

上述递归定义也可以以如下方式给出:

$f(0)=\min(A)$;

设 $\beta > 0$ 为一个序数而且对于 $\gamma < \beta$, 我们已经定义了 $f(\gamma)$, 并且满足

$$f \restriction \beta : \beta \to A$$

是一个严格单增函数并且

$$\forall \xi \, (\xi \in A - \mathrm{rng}(f \restriction \beta) \to \xi \geqslant \bigcup \{f(\gamma) + 1 \mid \gamma < \beta\}).$$

如果 $A - \mathrm{rng}(f \restriction \beta) \neq \varnothing$, 那么令

$$f(\beta) = \min(A - \mathrm{rng}(f \restriction \beta));$$

如果 $A - \mathrm{rng}(f \restriction \beta) = \varnothing$, 那么结束我们的递归定义.

令 β 是结束递归定义的地方, 那么 $f : \beta \to A$ 就是 A 的自然列表.

定义 1.72 (1) 对一个非零极限序数 α 和它的一个子集合 A 而言, 我们说 A 在 α 中是**无界的**是指

$$\forall \beta \, (\beta < \alpha \to \exists \gamma \, (\gamma \in A \wedge \beta < \gamma)).$$

(2) 对一个非零极限序数 α 和一个序数的集合 A 而言, 我们说 α 是 A 的一个**极限点**是指 $A \cap \alpha$ 在 α 中无界. 对于序数的一个集合 A 来讲, 我们用 A' 来记由 A 的极限点所组成的集合, 即

$$\forall \beta \, (\beta \in \mathrm{Ord} \to (\beta \in A' \leftrightarrow \forall \gamma (\gamma < \beta \to \exists \alpha \, (\alpha \in \beta \cap A \wedge \gamma < \alpha)))).$$

(3) 对于一个序数的集合 C 而言, 我们说它是序数的一个**闭集**是指 C 的每一个极限点都一定在 C 之中.

(4) 对于一个非零极限序数 α 和它的一个子集合 C 而言, 我们说 C 是 α 的一个**闭子集**是指 $C \cup \{\alpha\}$ 是序数的一个闭集, 也就是说, 如果 $\beta < \alpha$ 是 C 的一个极限点, 那么 $\beta \in C$.

(5) 对于一个非零极限序数 α 和它的一个子集合 C 而言, 我们说 C 是 α 的一个**无界闭子集**是指 C 既在 α 中无界又是它的一个闭子集.

命题 1.23 设 A 是序数的一个集合.

(1) 如果 α 是 A' 的一个极限点, 那么存在一个从 $\alpha \cap A'$ 到 $\alpha \cap A$ 的严格单调递增函数.

(2) 如果 α 是 A' 的一个极限点, 那么 $\alpha \cap A'$ 的长度一定小于或者等于 $\alpha \cap A$ 的长度.

(3) A' 是一个闭集.

证明 设 A 是序数的一个集合, α 是一个非零极限序数, $A' \cap \alpha$ 在 α 中无界. 对任意的 $\beta \in \alpha \cap A'$, 令 η_β 为满足要求 $x \in \alpha \cap A'$ 以及 $\beta < x$ 的最小解, 即

$$\eta_\beta = \min(\{\gamma \in \alpha \cap A' \mid \beta < \gamma\}).$$

由于 $\eta_\beta \in A'$, $A \cap \eta_\beta$ 在 η_β 中无界. 因为 $\beta < \eta_\beta$, 必有 γ 满足要求 $\beta < \gamma$ 以及 $\gamma \in A \cap \eta_\beta$. 于是我们定义 $f(\beta)$ 为最小的这样的 γ, 即

$$f(\beta) = \min(\{\gamma \in A \cap \eta_\beta \mid \beta < \gamma\}).$$

所以, $f : \alpha \cap A' \to \alpha \cap A$, 而且 f 严格单调递增: 如果 $\beta < \gamma$ 都在 $\alpha \cap A'$ 中, 那么

$$f(\beta) < \eta_\beta \leqslant \gamma < f(\gamma).$$

□

定义 1.73 (1) 我们把从一个序数到一个序数的映射称为一个序数函数.

(2) 一个序数函数 f 的**上确界**是满足不等式方程 $\mathrm{rng}(f) \subseteq \alpha$ 的最小序数解:

$$\sup(\{f(\gamma) + 1 \mid \gamma \in \mathrm{dom}(f)\}).$$

一个序数函数 f 在一个非零极限序数 γ 中是无界的当且仅当 γ 是 f 的上确界.

(3) 对于一个序数函数 f 而言, 我们称 f 是一个**单增连续函数**[19], 或者**连续嵌入函数**当且仅当 f 满足如下要求:

(a) 如果 $\alpha \in \beta \in \mathrm{dom}(f)$, 那么 $f(\alpha) \in f(\beta)$, 即 f 是一个严格单调递增的函数;

(b) 如果 $\alpha \in \mathrm{dom}(f)$ 是一个极限序数, 那么

$$f(\alpha) = \bigcup\{f(\beta) \mid \beta < \alpha\} = \sup(\{f(\beta) \mid \beta < \alpha\}).$$

定理 1.67 (1) 一个序数的非空集合 A 是序数的一个闭集的充分必要条件为它的自然列表是一个定义在一个后继序数上的单增连续函数.

(2) 一个定义在极限序数上的严格单调递增的序数函数是一个连续嵌入函数的充分必要条件为它的值域是它的上确界的一个闭子集.

(3) 设 α 为一个非零极限序数. 那么 A 是 α 的一个无界闭子集当且仅当 A 的自然列表是一个从 $\mathrm{ot}(A)$ 到 α 的无界连续嵌入函数.

证明 (1) (必要性) 设 A 为序数的一个非空闭集. 设 $\tau : \mathrm{ot}(A) \to A$ 是 A 的自然列表. 由于 A 是非空闭集, A 必有一个最大元素. 所以, $\mathrm{ot}(A)$ 是一个后继序数. 设 $\alpha < \mathrm{ot}(A)$ 为一个非零极限序数. 那么, $\tau \upharpoonright \alpha$ 是 $A \cap \tau(\alpha)$ 的自然列表. 令

19 normal functions.

$\gamma=\bigcup A\cap\tau(\alpha)$. γ 是一个极限序数而且是 A 的一个极限点. 由于 A 是一个闭集, $\gamma\in A$. 所以, $\gamma=\tau(\alpha)$. 因此, τ 是一个连续嵌入函数.

(充分性) 设 $\tau:\beta+1\to A$ 是 A 的自然列表. 设 α 是一个序数而且 $A\cap\alpha$ 是 α 的一个无界子集, 即 α 是 A 的一个极限点. 因此, $\alpha\leqslant\tau(\beta)$. 令 $\gamma\leqslant\beta$ 为不等式方程 $\alpha\leqslant\tau(x)$ 的关于 x 的最小解. 于是

$$\gamma=\mathrm{ot}(A\cap\alpha)\wedge\alpha\cap A=\tau(\gamma)\cap A.$$

从而 γ 是一个极限序数. 由连续性, $\tau(\gamma)=\bigcup\{\tau(\xi)\mid\xi<\gamma\}$. 另一方面,

$$\alpha\cap A=\{\tau(\xi)\mid\xi<\gamma\},$$

所以 $\alpha\geqslant\tau(\gamma)$, 由此我们得到结论: $\alpha=\tau(\gamma)\in A$.

(2) (必要性) 设 $f:\alpha\to\beta$ 为一个定义在极限序数 $\alpha\neq 0$ 上的序数连续嵌入函数, 而且我们设 β 为 f 的上确界. 于是 β 必是一个极限序数. 重新定义一个序数函数 g 如下:

$$g\restriction\alpha=f\ \wedge g(\alpha)=\beta,$$

g 是定义在一个后继序数上的集合 $\mathrm{rng}(f)\cup\{\beta\}$ 的自然列表. g 是一连续嵌入函数. 于是, $\mathrm{rng}(f)\cup\{\beta\}$ 是序数的一个闭集. 所以, $\mathrm{rng}(f)$ 是 β 的一个闭子集.

(充分性) 设 $f:\alpha\to\beta$ 为一个定义在极限序数 $\alpha\neq 0$ 上的严格单调递增的序数函数. 令 β 为它的上确界. 于是 β 是一个极限序数. 现在我们假设 $\mathrm{rng}(f)$ 是 β 的一个闭子集. 设 $0<\gamma<\alpha$ 为一个极限序数. 我们假定 $f(\gamma)>\bigcup\{f(\xi)\mid\xi<\gamma\}$. 令 $\eta=\bigcup\{f(\xi)\mid\xi<\gamma\}$. η 一定是一个极限序数而且对于任何一个 $\xi<\gamma$, 都有 $f(\xi)<\eta$. 所以 η 是 $\mathrm{rng}(f)$ 的一个极限点. 由于 $\mathrm{rng}(f)$ 是 β 的闭子集而且 $\eta<\beta$, $\eta\in\mathrm{rng}(f)$. 因为 f 是严格单增的, 必有 $f(\gamma)\leqslant\eta$. 矛盾. □

定义 1.74 设 α 为一个非零极限序数. α 的**梯度**[20], 记成 $\mathrm{cf}(\alpha)$, 由如下等式定义:

$$\mathrm{cf}(\alpha)=\min\{\mathrm{ot}(A)\mid A\subseteq\alpha\wedge\forall\beta\ (\beta<\alpha\to\exists\gamma(\gamma\in A\wedge\beta<\gamma))\},$$

即, $\mathrm{cf}(\alpha)$ 是 α 的最短的无界子集的长度.

定理 1.68 设 $\alpha\geqslant\gamma\geqslant\omega$ 为两个极限序数. 那么如下两个命题等价:

(1) $\gamma=\mathrm{cf}(\alpha)$;

(2) 存在从 γ 到 α 的无界单增映射, 并且对于任何一个 $\eta<\gamma$, 任意一个从 η 到 α 上的映射一定在 α 中有界.

---

20 cofinality.

证明　(1) → (2).

令 $A \subseteq \alpha$ 在 α 中无界而且 $\mathrm{ot}(A)=\gamma=\mathrm{cf}(\alpha)$. 那么, A 的雪崩映射的逆映射就是一个从 γ 到 α 上的无界单增映射. 设 $\eta<\gamma$, $g:\eta\to\alpha$. 令 $B=g[\eta]$. 那么 $\mathrm{ot}(B)\leqslant\eta<\mathrm{cf}(\alpha)$. 所以 B 必然在 α 中有界. 故 g 一定在 α 中有界.

(2) → (1).

令 $f:\gamma\to\alpha$ 为一个无界单增的映射. 令 $A=f[\gamma]$. 那么, A 在 α 中无界, 而且 $\mathrm{ot}(A)=\gamma$. 所以,

$$\mathrm{cf}(\alpha)\leqslant\gamma.$$

现假设 $\mathrm{cf}(\alpha)<\gamma$. 令 $B\subseteq\alpha$ 为一个长度为 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 的在 α 中无界的子集. 那么, B 的雪崩映射的逆映射 $\pi_B^{-1}:\mathrm{cf}(\alpha)\to\alpha$ 为一个单增无界映射, 而且 $\mathrm{cf}(\alpha)<\gamma$. 这与 (2) 不符. □

定理 1.69　设 $\alpha>0$ 为一个极限序数. 那么 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 是 α 的最短的无界闭子集的长度.

证明　令 η 为 α 的最短的无界闭子集的长度. 那么 $\eta\geqslant\mathrm{cf}(\alpha)$.

我们要证 $\eta\leqslant\mathrm{cf}(\alpha)$. 令 $A\subseteq\alpha$ 为一个长度为 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 的无界子集, 即

$$\mathrm{cf}(\alpha)=\mathrm{ot}(A).$$

我们用两种方法来证明 $\eta\leqslant\mathrm{cf}(\alpha)$.

(a) 令 $f:\mathrm{cf}(\alpha)\to\alpha$ 为 A 的自然列表. 我们如下定义一个从 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 到 α 的无界连续嵌入 g.

$g(0)=f(0)$.

对于 $\beta+1<\mathrm{cf}(\alpha)$, 定义 $g(\beta+1)=f(\beta+1)$.

对于非零极限序数 $\beta<\mathrm{cf}(\alpha)$, 定义

$$g(\beta)=\bigcup\{g(\xi+1)\mid\xi<\beta\}=\bigcup\{g(\xi)\mid\xi<\beta\}.$$

那么,

$$g(\beta)=\bigcup\{f(\xi+1)\mid\xi<\beta\}=\bigcup\{f(\xi)\mid\xi<\beta\}\leqslant f(\beta).$$

g 是一个从 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 到 α 的无界连续嵌入映射. 从而, $B=g[\mathrm{cf}(\alpha)]$ 就是 α 的一个无界闭子集, 其长度为 $\mathrm{cf}(\alpha)$. 因此, $\eta\leqslant\mathrm{cf}(\alpha)$.

(b) 我们考虑两种情形：A' 在 α 中有界还是无界.

第一, A' 在 α 中有界.

在这种情形下, 我们断言 $A'=\varnothing$, 从而 A 就是 α 的一个无界闭子集并且

$$\eta=\mathrm{cf}(\alpha)=\omega.$$

如果 A' 非空, 令 $\gamma<\alpha$ 为 A' 的上确界, 即不等式方程组 $A'\subseteq x\wedge x<\alpha$ 的最小解. 那么 $\gamma=\max(A')+1$. 因此, $A\cap\max(A')$ 的长度一定是一个非零极限序数. 同时, $A-\gamma$ 是 α 的一个无界子集, 并且它的长度一定是 ω(否则, 在它的自然列表中的首 ω 个元素就会给出一个大于 $\max(A')$ 的 A 的极限点). 但此时, A 的长度一定会严格大于 ω, 因为 $\mathrm{ot}(A-\gamma)=\omega$, $\mathrm{ot}(A\cap\max(A'))\geqslant\omega$, $\mathrm{ot}(A)\geqslant\omega+\omega$. 矛盾.

第二, A' 在 α 中无界.

此时, A' 就是 α 的一个无界闭子集而且它的长度就小于等于 A 的长度 $\mathrm{cf}(\alpha)$. 所以, $\eta\leqslant\mathrm{cf}(\alpha)$. □

定理 1.70 *设 α 为一个非零极限序数. 那么, $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha))=\mathrm{cf}(\alpha)$.*

证明 一方面, 我们有 $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha))\leqslant\mathrm{cf}(\alpha)$. 另一方面, 取 $A\subseteq\alpha$ 的一个长度为 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 的无界子集. 令

$$\tau:\mathrm{cf}(\alpha)\to A$$

为 A 的自然列表. 再取 $B\subseteq\mathrm{cf}(\alpha)$ 的一个长度为 $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha))$ 的无界子集. 那么 $\tau[B]$ 为 α 的一个无界子集. 因此, $\mathrm{cf}(\alpha)\leqslant\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha))$. □

推论 1.10 *设 $\alpha>0$ 是一个极限序数.*

(1) 设 $A\subseteq\mathrm{cf}(\alpha)$. 那么, A 在 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 中无界当且仅当 A 的长度为 $\mathrm{cf}(\alpha)$.

(2) 如果 $\beta<\mathrm{cf}(\alpha)$, 而且 $f:\beta\to\mathrm{cf}(\alpha)$, 那么 f 一定在 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 中有界.

证明 (2) 注意 $\mathrm{rng}(f)$ 的长度一定小于等于 $\mathrm{dom}(f)$, 因为 $\mathrm{rng}(f)$ 与 $\mathrm{dom}(f)$ 的一个子集同构:

$$\begin{aligned}&\{\xi\in\mathrm{dom}(f)\mid\exists\gamma(\gamma\in\mathrm{rng}(f)\wedge f(\xi)\\&=\gamma\wedge\forall\eta((\eta\in\mathrm{dom}(f)\wedge\gamma=f(\eta))\to\xi\leqslant\eta))\}.\end{aligned}$$ □

定理 1.71 *(1) 设 $\alpha>0$ 为一个极限序数. 如果 $A\subseteq\alpha$ 是 α 的一个无界子集, 那么 A 一定包含一个长度为 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 的无界子集.*

*(2) 设 α 和 γ 为非零极限序数. 又设 $f:\gamma\to\alpha$ 为一个长度为 γ 的***单调不减***序列, 即如果 $\xi<\beta<\gamma$, 那么*

$$f(\xi)\leqslant f(\beta),$$

并且 α 是 f 的上确界. 那么 $\mathrm{cf}(\gamma)=\mathrm{cf}(\alpha)$.

证明 (1) 设 $\alpha>0$ 为一极限序数, $A\subseteq\alpha$ 是 α 的一个无界子集. 那么, A 的长度一定大于或者等于 $\mathrm{cf}(\alpha)$. 令 $B\subseteq\alpha$ 为一个长度为 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 的无界闭子集. 令 $\tau:\mathrm{cf}(\alpha)\to B$ 为 B 的自然列表. 我们知道 τ 是一个连续嵌入函数. 利用 τ, 我们来定义 A 的一个长度为 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 的在 α 中无界的子集. 为此, 我们只需定义一个从 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 到 A 的在 α 中无界的严格单调递增映射 (因为它的值域就是我们所要的集合).

令 $\gamma_0 = 0$, $f(0) = \min(A - \{\tau(\gamma_0) + 1\})$.

对 $\beta < \mathrm{cf}(\alpha)$, 令 $\gamma_{\beta+1} < \mathrm{cf}(\alpha)$ 为满足不等式方程 $f(\beta) < \tau(x)$ 的最小解, 以及

$$f(\beta + 1) = \min(A - \{\tau(\gamma_{\beta+1}) + 1\}).$$

如果 $\beta < \mathrm{cf}(\alpha)$ 是一个非零极限序数, 而且对于 $\eta < \beta$, 我们已经定义了 $f(\eta)$ 和 γ_η, 令 $\gamma_\beta = \bigcup\{\gamma_\eta \mid \eta < \beta\}$. 再令

$$f(\beta) = \min(A - \{\tau(\gamma_\beta) + 1\}).$$

于是, $f : \mathrm{cf}(\alpha) \to A$ 是一个严格单调递增的在 α 中无界的映射, 因为对于任意的 $\xi < cf(\alpha)$,

$$\tau(\gamma_\xi) < f(\xi) < \tau(\gamma_{\xi+1}) < f(\xi + 1)$$

以及 $\langle \gamma_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\alpha) \rangle$ 是 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 中的一个无界闭子集的自然列表, 而且对于任意的 $\eta < \mathrm{cf}(\alpha)$, 我们都有

$$\tau(\gamma_\eta) = \bigcup\{\tau(\gamma_\xi) \mid \xi < \eta\}.$$

(2) 现在设 α 和 γ 分别是两个非零极限序数, 而且设 $f : \gamma \to \alpha$ 为一个单增的在 α 中无界的函数.

对 $\beta \in \mathrm{rng}(f)$, 令 $g(\beta)$ 为满足方程 $\beta = f(x)$ 的最小解. 令 $X = \mathrm{rng}(g)$. 那么 $g : \mathrm{rng}(f) \to X$ 是一个同构映射. 同时 X 在 γ 中是无界的 (因为 α 是一个极限序数, f 在 α 中无界, f 不可能从某一点之后为常数函数). 取 X 的一个长度为 $\mathrm{cf}(\gamma)$ 的子集 $A \subseteq X$. 那么 $f \upharpoonright A$ 必在 α 中无界: 对于 $\xi < \alpha$, 取 $\beta \in X$ 满足 $f(\beta) > \xi$, 再取 $\eta \in A$ 满足 $\eta > \beta$, 那么 $f(\eta) > \xi$. 由于 $f \upharpoonright A : A \to \mathrm{rng}(f \upharpoonright A)$ 是一个同构映射, 我们有 $\mathrm{cf}(\alpha) \leqslant \mathrm{cf}(\gamma)$. 又取 $\mathrm{rng}(f)$ 的一个长度为 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 的无界子集 $B \subseteq \mathrm{rng}(f)$. 令 $\tau : \mathrm{cf}(\alpha) \to B$ 为 B 的自然列表. 再令 $h = g \circ \tau : \mathrm{cf}(\alpha) \to \gamma$. 那么 h 是一个严格单调递增而且在 γ 中无界的函数. 因此, $\mathrm{cf}(\gamma) \leqslant \mathrm{cf}(\alpha)$. 这样, 我们得到 $cf(\alpha) = \mathrm{cf}(\gamma)$. □

定义 1.75　我们称一个极限序数 $\alpha > 0$ 为一个**正则序数**[21] 当且仅当 $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$.

例 1.26　(1) ω 是一个正则序数.

(2) 如果 α 是一个非零极限序数, 那么 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 是一个正则序数.

问题 1.4　存在大于 ω 的正则序数吗?

定理 1.72　设 $\alpha > 0$ 为一个极限序数. 那么如下三个命题等价:

(1) α 是一个正则序数;

(2) α 的任何两个无界子集都 $\in$-同构; 从而, α 的任何无界子集都具有序型 α;

21 regular ordinal.

(3) α 的任何两个无界闭子集都连续 $\in$-同构, 从而, α 的任何无界闭子集都具有序型 α.

证明　(练习.) □

定理 1.73　设 $\delta > \omega$ 是一个正则序数以及 $C \subseteq \delta$. 那么如下命题等价:

(1) C 是 δ 的一个无界闭子集;

(2) C 的自然列表是 δ 上的一个单增连续函数;

(3) C 是一个从 δ 到 δ 的单增连续函数的值域.

证明　(练习.) □

定理 1.74　设 $\alpha > \omega$ 是一个正则序数, 而且 $f : \alpha \to \alpha$ 是一个连续嵌入函数. 那么

$$\{\gamma < \alpha \mid f(\gamma) = \gamma\}$$

是 α 的一个无界闭子集.

证明　我们只需证明 f 的不动点的集合在 α 中是无界的. 为此, 令 $\beta < \alpha$. 我们需要找到一个大于 β 的 f 的不动点. 令 $\beta_0 = \beta$. 递归地, 令 $\beta_{n+1} = f(\beta_n) + 1$. 于是, 对于所有的 $n \in \omega$, 我们有 $\beta_n \leqslant f(\beta_n) < \beta_{n+1}$. 同时,

$$\{\beta_n \mid n \in \omega\}$$

是 α 的一个长度为 ω 的子集. 因此必然在 α 中有界. 令

$$\gamma = \bigcup\{\beta_n \mid n \in \omega\}.$$

那么 $\gamma < \alpha$ 是一个极限序数, 而且

$$f(\gamma) = \bigcup\{f(\beta_n) \mid n \in \omega\} = \bigcup\{\beta_n \mid n \in \omega\} = \gamma.$$ □

1.8.3　序数算术运算

这里我们来定义三类定义在序数类上的单增连续类函数: 序数加法运算、乘法运算和指数运算; 这三个二元运算作为第二分量的类函数时都是单增连续的.

定义 1.76　对于两个不相交的线性有序集合 $(A, <_A)$ 和 $(B, <_B)$, 我们如下定义它们的**直和**$(A + B, <)$:

$$< = <_A \cup <_B \cup \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\},$$

即定义 $A < B$, A 中的每一个元素都小于 B 中的每一个元素.

定义 1.77 对于两个线性有序集合 $(A,<_A)$ 和 $(B,<_B)$, 我们如下定义它们的**乘积**$(A\times B,<)$: 对于 $A\times B$ 中的任意两个 $(a,b),(x,y)$,

$$(a,b)<(x,y)\leftrightarrow(a<_A x\vee(a=x\wedge b<y)),$$

即 $A\times B$ 的**垂直字典序**, 简称为 A 与 B 的**字典序**.

定义 1.78 对于两个线性有序集合 $(A,<_A)$ 和 $(B,<_B)$, 我们如下定义它们的**乘积**$(A\times B,<)$: 对于 $A\times B$ 中的任意两个 $(a,b),(x,y)$,

$$(a,b)<(x,y)\leftrightarrow(b<_B y\vee(b=y\wedge a<x)),$$

即 $A\times B$ 的**水平字典序**, 又称为**反字典序**.

[想象：B 是一条垂线, 将 B 中的每一个点换成以这个点为颜色的与 A 同构的一条水平直线, 而这些不同颜色的水平直线之间仍保持着原来这些点之间的线性序. 这就构成了一条新的直线：它们的乘积序、水平字典序. 这一图形对证明结合律有用.]

注意：当 B 是一个单点集合, $<_B=\varnothing$, 上面所定义的乘积便是 $(A,<_A)$ 的一个简单的自然同构.

命题 1.24 设 α 和 β 为两个序数.

(1) 令 $(\alpha\times\{0\},<_0)$ 和 $(\beta\times\{1\},<_1)$ 分别为它们的乘积, 那么这两个乘积的直和 $(\alpha\times\{0\}+\beta\times\{1\},<)$ 是一个秩序集合.

(2) 在字典序或者水平字典序下, $(\alpha\times\beta,<)$ 是一个秩序集合.

证明 (练习.) □

定义 1.79 我们将两个序数 α 和 β 的序数之和, 记成 $\alpha+\beta$, 定义为唯一的与

$$(\alpha\times\{0\}+\beta\times\{1\},<)$$

同构的序数.

注意：序数之和并非可交换. 比如, $1+\omega=\omega<\omega+1$.

命题 1.25 (序数加法递归式) $\alpha+\beta=\alpha\cup\{\alpha+\gamma\mid\gamma\in\beta\}$.

更具体地说, 序数的加法运算满足如下的递归运算公式:

(1) $\alpha+0=\alpha$;

(2) $\forall\beta\,(\beta\in\mathrm{Ord}\to(\alpha+(\beta+1)=(\alpha+\beta)+1))$;

(3) 对于所有的非零极限序数 β, $\alpha+\beta=\bigcup\{\alpha+\xi\mid\xi<\beta\}$.

证明 对于序数加法运算：首先, 加法递归定义计算公式是合理的. 考虑三个二元类函数 G_1,G_2,G_3：

$$G_1(z,x)=z;G_2(z,x)=x+1;$$

当 x 是一个函数时, $G_3(z,x)=\bigcup\text{rng}(x)$; 否则, $G_3(z,x)=\varnothing$. 那么, 如下的计算公式给出序数加法运算的递归定义：对于任意的 z,

(a) $F(z,0)=G_1(z,0)=z$;

(b) 对于任意序数 α, $F(z,\alpha+1)=G_2(z,F_z(\alpha))=F(z,\alpha)+1$;

(c) 对于任意非零极限序数 γ,

$$F(z,\gamma)=G_3(z,F_z\restriction_\gamma)=\bigcup\text{rng}(F_z\restriction_\gamma)=\bigcup\{F(z,\alpha)\mid\alpha<\gamma\}.$$

令 $(W_1,<_1)\cong(\alpha_1,<)$, $(W_2,<_2)\cong(\alpha_2,<)$, $W_1\cap W_2=\varnothing$;

$$(W,<)=(W_1+W_2,<);$$

对 α_2 施归纳, 验证：$(W,<)\cong\alpha_1+\alpha_2$, 其中 $\alpha_1+\alpha_2$ 依据递归定义计算.

当 $\alpha_2=\beta+1$ 时, 令 $a\in W_2$ 为最大元, 那么根据归纳假设,

$$(W[a],<)\cong(\alpha_1+\beta,<),$$

从而

$$(W,<)\cong(\alpha_1+\alpha_2,<).$$

当 $\alpha_2>0$ 是一个极限序数时, 根据归纳假设, 对于 $\beta<\alpha_2$, 令 $a_\beta\in W_2$ 见证 $(W[a_\beta],<)\cong(\alpha_1+\beta,<)$, 令 f_β 为唯一的序同构映射. 如果 $\beta<\gamma<\alpha_2$, 那么 $f_\beta\subset f_\gamma$. 令

$$f=\bigcup\{f_\beta\mid\beta<\alpha_2\}.$$

那么, $f:(W,<)\cong(\alpha_1+\alpha_2,<)=(\alpha_1+\bigcup\{\alpha_1+\beta\mid\beta<\alpha_2\},<)$. □

引理 1.15 (序数加法连续性)　如果 $\gamma>0$ 是一个极限序数, $\langle\beta_\xi\mid\xi<\gamma\rangle$ 是序数的一个单调递增序列,

$$\beta=\bigcup\{\beta_\xi\mid\xi<\gamma\}=\sup_{\xi<\gamma}\beta_\xi.$$

那么, 对于任意的序数 α 都有

$$\alpha+\beta=\sup_{\xi<\gamma}(\alpha+\beta_\xi).$$

证明　(练习.) □

定理 1.75 (加法基本性质)　(1) 加法结合律: 设 α,β 和 γ 为序数. 那么,

$$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma.$$

(2) 左消去律:

(a) $\forall\alpha\,\forall\beta\,\forall\gamma\,(\alpha<\beta\leftrightarrow\gamma+\alpha<\gamma+\beta)$;

(b) $\forall\alpha\,\forall\beta\,\forall\gamma\,(\alpha+\beta=\alpha+\gamma\leftrightarrow\beta=\gamma)$.

(3) *右弱保序*: $\forall\alpha\,\forall\gamma\,\forall\beta\,(\alpha<\gamma\to\alpha+\beta\leqslant\gamma+\beta)$.

(4) *补差律*: $\forall\alpha\,\forall\beta\,(\alpha\leqslant\beta\to\exists\gamma\,(\alpha+\gamma=\beta)$(*此 γ 必唯一*)).

证明　(1) 对 γ 施归纳.

当 $\gamma=0$ 时, 等式自然成立.

设 $\gamma=\gamma_0+1$. 归纳假设为：$\alpha+(\beta+\gamma_0)=(\alpha+\beta)+\gamma_0$. 那么

$$\begin{aligned}\alpha+(\beta+(\gamma_0+1))&=\alpha+((\beta+\gamma_0)+1)=(\alpha+(\beta+\gamma_0))+1\\&=((\alpha+\beta)+\gamma_0)+1=(\alpha+\beta)+(\gamma_0+1).\end{aligned}$$

设 γ 是一个非零极限序数, 以及 $\forall\gamma_0<\gamma\,(\alpha+(\beta+\gamma_0)=(\alpha+\beta)+\gamma_0)$. 此时,

$$\beta+\gamma=\bigcup\{\beta+\gamma_0\mid\gamma_0<\gamma\}$$

也是一个极限序数. 于是, 根据加法递归定义 (命题 1.25) 以及加法运算的连续性 (引理 1.15),

$$\begin{aligned}\alpha+(\beta+\gamma)&=\bigcup\{\alpha+\delta\mid\delta<\beta+\gamma\}\\&=\bigcup\{\alpha+(\beta+\gamma_0)\mid\gamma_0<\gamma\}\\&=\bigcup\{(\alpha+\beta)+\gamma_0\mid\gamma_0<\gamma\}\\&=(\alpha+\beta)+\gamma.\end{aligned}$$

(2)(a) 首先, 对 β 施归纳, 验证：$\alpha<\beta\to\gamma+\alpha<\gamma+\beta$.

假设 $\alpha<\beta$, 以及 $\forall\delta\,(\alpha<\delta<\beta\to\gamma+\alpha<\gamma+\delta)$. 如果 $\beta=\delta+1$, 那么 $\alpha\leqslant\delta$; 不妨设 $\alpha<\delta$, 应用归纳假设,

$$\gamma+\alpha<\gamma+\delta<(\gamma+\delta)+1=\gamma+(\delta+1)=\gamma+\beta.$$

如果 β 是一极限序数, 那么, $\alpha+1<\beta$, 以及

$$\gamma+\alpha<(\gamma+\alpha)+1=\gamma+(\alpha+1)\leqslant\bigcup\{\gamma+\delta\mid\delta<\beta\}=\gamma+\beta.$$

其次, 假设 $\gamma+\alpha<\gamma+\beta$. 如果 $\beta<\alpha$, 根据上述, $\gamma+\beta<\gamma<\alpha$; 如果 $\beta=\alpha$, 则 $\gamma+\alpha=\gamma+\beta$. 因此, 只能有 $\alpha<\beta$.

(2)(b) 由 (2)(a) 即得.

(3) 直接应用递归定义.

(4) 设 $\alpha<\beta$. 此时 $\beta=\alpha\cup\{\eta<\beta\mid\alpha\leqslant\eta\}$; 令 $(\xi,<)\cong(\{\eta<\beta\mid\alpha\leqslant\eta\},<)$. 于是, $\beta=\alpha+\xi$. □

定义 1.80 我们将两个序数 α 和 β 的序数之积, 记成 $\alpha\cdot\beta$, 定义为唯一的与 $\alpha\times\beta$ 的水平字典序

$$(\alpha\times\beta,<)$$

同构的序数; 而将两个序数 β 和 α 的序数之积, 记成 $\beta\cdot\alpha$, 定义为唯一的与 $\alpha\times\beta$ 的字典序

$$(\alpha\times\beta,<)$$

同构的序数.

例 1.27 $2\cdot\omega=\omega<\omega+\omega=\omega\cdot 2$.

命题 1.26 (乘法递归式) 序数的乘法运算满足如下的递归运算公式:

(1) $\alpha\cdot 0=0$;

(2) $\forall\beta\,(\beta\in\mathrm{Ord}\to(\alpha\cdot(\beta+1)=(\alpha\cdot\beta)+\alpha))$;

(3) 对于所有的非零极限序数 β, $\alpha\cdot\beta=\bigcup\{\alpha\cdot\xi\mid\xi<\beta\}$.

证明 对 β 施归纳, 验证上面定义的序数乘法满足递归定义等式.

设 β 是非零极限序数. 如下定义 $f:(\alpha\times\beta,<)\to\alpha\cdot\beta$: 对于 $(\xi,\eta)\in\alpha\times\beta$,

$$f(\xi,\eta)=\alpha\cdot\eta+\xi.$$

那么, f 是一个同构. □

引理 1.16 (乘法连续性) 如果 $\gamma>0$ 是一个极限序数, $\langle\beta_\xi\mid\xi<\gamma\rangle$ 是序数的一个单调递增序列,

$$\beta=\bigcup\{\beta_\xi\mid\xi<\gamma\}=\sup_{\xi<\gamma}\beta_\xi.$$

那么, 对于任意的序数 α 都有

$$\alpha\cdot\beta=\sup_{\xi<\gamma}\left(\alpha\cdot\beta_\xi\right).$$

证明 (练习.) □

定理 1.76 (1) 分配律: $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$.

(2) 结合律: $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$.

(3) 左消去律:

(a) $\forall\alpha\forall\gamma\forall\beta\,(\beta\neq 0\to(\alpha<\gamma\leftrightarrow\beta\cdot\alpha<\beta\cdot\gamma))$;

(b) $\forall\alpha\forall\gamma\forall\beta\,(\beta\neq 0\to(\alpha=\gamma\leftrightarrow\beta\cdot\alpha=\beta\cdot\gamma))$.

(4) 右弱保序: $\forall\alpha\forall\gamma\forall\beta\,(\alpha<\gamma\to\alpha\cdot\beta\leqslant\gamma\cdot\beta)$.

证明 我们来证明 (1) 和 (2), 将其余的留作练习.

(1) 对 γ 施归纳.

设 $\gamma=\gamma_0+1$. 那么

$$\begin{aligned}\alpha\cdot(\beta+\gamma)&=\alpha\cdot((\beta+\gamma_0)+1)=\alpha\cdot(\beta+\gamma_0)+\alpha\\&=(\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma_0)+\alpha=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma.\end{aligned}$$

设 γ 是非零极限序数. 那么根据递归定义以及连续性,

$$\begin{aligned}\alpha\cdot(\beta+\gamma)&=\bigcup\{\alpha\cdot\delta\mid\delta<(\beta+\gamma)\}\\&=\bigcup\{\alpha\cdot(\beta+\eta)\mid\eta<\gamma\}\\&=\bigcup\{\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\eta\mid\eta<\gamma\}\\&=\alpha\cdot\beta+\bigcup\{\alpha\cdot\eta\mid\eta<\gamma\}\\&=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma.\end{aligned}$$

(2) 对 γ 施归纳.

$$\alpha\cdot(\beta\cdot(\gamma_0+1))=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma_0+\beta)=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma_0)+\alpha\cdot\beta=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma_0+\alpha\cdot\beta=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma.$$

设 γ 是非零极限序数. 那么, 根据递归定义以及连续性,

$$\begin{aligned}\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)&=\bigcup\{\alpha\cdot\delta\mid\delta<\beta\cdot\gamma\}\\&=\bigcup\{\alpha\cdot(\beta\cdot\eta)\mid\eta<\gamma\}\\&=\bigcup\{(\alpha\cdot\beta)\cdot\eta\mid\eta<\gamma\}\\&=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma.\end{aligned}$$

□

定义 1.81 (序数指数运算) 设 α 为一个序数.

(1) $\alpha^0=1$;

(2) 对于所有的序数 β, $\alpha^{\beta+1}=\alpha^\beta\cdot\alpha$;

(3) 对于所有的非零极限序数 β, $\alpha^\beta=\bigcup\{\alpha^\xi\mid\xi<\beta\}$.

引理 1.17 (单调性) (1) $\alpha\leqslant\beta\to\alpha^\gamma\leqslant\beta^\gamma$;

(2) $(1<\alpha\wedge\beta<\gamma)\to\alpha^\beta<\alpha^\gamma$;

(3) $\beta<\gamma\to\forall k\in\omega(\omega^\beta\cdot k<\omega^\gamma)$.

证明 (1) 和 (2) 之证明留作练习.

(3) $\omega^\beta\cdot k<\omega^\beta\cdot\omega=\omega^{\beta+1}\leqslant\omega^\gamma$. □

引理 1.18 (序数运算连续性) 如果 $\gamma>0$ 是一个极限序数, $\langle\beta_\xi\mid\xi<\gamma\rangle$ 是序数的一个单调递增序列,

$$\beta=\bigcup\{\beta_\xi\mid\xi<\gamma\}=\sup_{\xi<\gamma}\beta_\xi.$$

那么, 对于任意的序数 α 都有

$$\alpha+\beta=\sup_{\xi<\gamma}(\alpha+\beta_\xi),\quad \alpha\cdot\beta=\sup_{\xi<\gamma}(\alpha\cdot\beta_\xi),\quad \alpha^\beta=\sup_{\xi<\gamma}\left(\alpha^{\beta_\xi}\right).$$

证明　(练习.) □

推论 1.11　(1) 映射 $\alpha \mapsto \omega \cdot \alpha$ 是序数 α 的一个单增连续泛函;

(2) 映射 $\alpha \mapsto \omega^{\alpha}$ 是序数 α 的一个单增连续泛函.

定理 1.77　假设 δ 是一个正则序数, 即 δ 是一个非零极限序数, 并且 $\mathrm{cf}(\delta) = \delta$. 那么

$$\forall \alpha < \delta \forall \beta < \delta\, (\alpha + \beta < \delta \ \wedge \ \alpha \cdot \beta < \delta \ \wedge \ \alpha^{\beta} < \delta).$$

因此, 当 $\delta = \mathrm{cf}(\delta) > \omega$ 时, 如下三个集合在 δ 中都是无界闭子集:

$$\{\gamma < \delta | \omega + \gamma = \gamma\}, \quad \{\gamma < \delta \mid \omega \cdot \gamma = \gamma\}, \quad \{\gamma < \delta \mid \omega^{\gamma} = \gamma\}.$$

证明　设 $\alpha, \beta < \delta$. 对 β 施归纳. 注意当 $\beta < \delta$ 为非零极限序数时,

$$\mathrm{cf}(\beta) < \mathrm{cf}(\delta) = \delta.$$

□

序数运算的连续性的一个直接推论便是: 在序数乘法和指数运算下, 闭区间的原像必有最大元.

引理 1.19　(1) 如果 $0 < \alpha \leqslant \gamma$, 那么集合 $\{\beta \mid \alpha \cdot \beta \leqslant \gamma\}$ 必有最大元;

(2) 如果 $1 < \alpha \leqslant \gamma$, 那么集合 $\{\beta \mid \alpha^{\beta} \leqslant \gamma\}$ 必有最大元.

证明　对于满足条件的 $\alpha \leqslant \gamma$, 必有 $\exists \delta\, (\alpha \cdot \delta > \gamma)$ 以及 $\exists \delta\, (\alpha^{\delta} > \gamma)$. 这是因为 $\alpha \cdot (\gamma + 1) \geqslant \gamma + 1 > \gamma$, 以及 $\alpha^{\gamma+1} \geqslant \gamma + 1 > \gamma$.

令 $\eta = \min(\{\delta \mid \alpha \cdot \delta > \gamma\})$ 以及 $\mu = \min(\{\delta \mid \alpha^{\delta} > \gamma\})$. 根据上面的序数运算连续性引理, η 和 μ 都必定是后继序数. 令 $\eta = \beta + 1, \mu = \xi + 1$. β 和 ξ 就是分别所要的最大元. □

例 1.28　$\omega + \omega = \bigcup\{\omega + n \mid n < \omega\}$.

$\omega^2 = \omega \cdot \omega = \bigcup\{\omega \cdot n \mid n \in \omega\} = \bigcup\{\omega, \omega + \omega, \cdots, \omega + \cdots + \omega, \cdots\}$.

$\omega^3 = \omega^2 \cdot \omega = \omega \cdot \omega \cdot \omega$.

$\omega^{\omega} = \bigcup\{\omega^n \mid n < \omega\}$. (注意, 这里的 ω^{ω} 是用来记序数 ω 的 ω 次幂指数, 而不是从 ω 到 ω 的函数的全体所成的集合.)

回顾一下自然数算术运算的两个基本定理: 带余除法定理以及基展开范式定理.

定理 1.78 (带余除法定理)　对于任意自然数 $n \in \omega$, 如果自然数 $m \in \omega$ 非零, 那么必有唯一的自然数序对 $(q, r) \in \omega \times \omega$ 实现下列等式与不等式:

$$n = q \cdot m + r, \quad r < m.$$

证明　当 $n < m$ 时, 令 $q = 0, r = n$; 当 $n = m$ 时, 令 $q = 1, r = 0$; 当 $m < n$ 时, 令

$$q = \max(\{\ell \mid m \cdot \ell < n\}).$$

此 $q \geqslant 1$ 必定存在. 这样, $q \cdot m < n \leqslant m \cdot (q+1) = m \cdot q + m$. 令 $r < m$ 为满足等式 $n = m \cdot q + r$ 的唯一自然数. □

下面的基展开范式定理是前面二进制展开表示定理 (定理 1.47) 的一般化结论.

定理 1.79 (基展开范式定理)　设 $b \in \mathbb{N}$ 且 $1 < b$. 对于任意自然数 $m \in \omega$, 必有唯一自然数对序列

$$\langle (n_i, k_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant \ell \rangle$$

满足下述三项要求:

(1) $n_1 > n_2 > \cdots > n_\ell \geqslant 0$;

(2) $\forall 1 \leqslant i \leqslant \ell \, (0 < k_i < b)$;

(3) $m = b^{n_1} \cdot k_1 + b^{n_2} \cdot k_2 + \cdots + b^{n_\ell} \cdot k_\ell$.

证明　如果 $m < b$, 那么 $\ell = 1$ 且 $n_1 = 0$ 以及 $k_1 = m$; 如果 $m = b$, 则 $\ell = 1, n_1 = 1, k_1 = 1$.

现在设 $b < m$. 由于 $b^i < b^{i+1}$ 对于任意自然数 i 都成立, $\{i \mid b^i < m\}$ 是一个非空有限集合, 因而有最大元. 令 $n_1 = \max(\{i \mid b^i < m\})$. 于是, $1 \leqslant n_1$ 并且 $b^{n_1} < m \leqslant b^{n_1+1}$. 集合 $\{k \mid b^{n_1} \cdot k < m\}$ 是 b 的一个非空子集合. 令

$$k_1 = \max(\{k \mid b^{n_1} \cdot k < m\}).$$

那么, $0 < k_1 < b$.

令 m_1 为满足等式 $m = b^{n_1} \cdot k_1 + m_1$ 的唯一自然数. 此时, $m_1 < m$ 且 $m_1 < b^{n_1}$. 根据归纳假设, 必有自然数对序列 $\langle (n_i, k_i) \mid 2 \leqslant i \leqslant \ell \rangle$ 满足下述三项要求:

(1) $n_2 > n_3 > \cdots > n_\ell \geqslant 0$;

(2) $\forall 2 \leqslant i \leqslant \ell \, (0 < k_i < b)$;

(3) $m_1 = b^{n_2} \cdot k_2 + b^{n_3} \cdot k_3 + \cdots + b^{n_\ell} \cdot k_\ell$.

于是, $n_2 < n_1$, 以及序列 $\langle (n_i, k_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant \ell \rangle$ 满足三项要求.

唯一性留作练习. □

现在我们将自然数的这两个展开表示定理推广到整个序数之上.

引理 1.20 (带余除法引理)　对于任意的序数 γ 以及非零序数 α, 必有唯一的序数对 (β, ρ) 来满足下述等式与不等式:

$$\gamma = \alpha \cdot \beta + \rho, \qquad \rho < \alpha.$$

证明　如果 $\alpha > \gamma$, 令 $\beta = 0$ 以及 $\rho = \gamma$; 如果 $\alpha = \gamma$, 令 $\beta = 1$ 以及 $\rho = 0$. 不妨设 $\alpha < \gamma$. 根据引理 1.19, 令

$$\delta = \max\left(\{\beta \mid \alpha \cdot \beta \leqslant \gamma\}\right).$$

根据定理 1.75 中的 (4), 令 ρ 为唯一的实现等式 $\alpha\cdot\delta+\rho=\gamma$ 之序数. 此 $\rho<\alpha$. 因若不然, $\alpha\leqslant\rho$, 从而

$$\alpha\cdot(\delta+1)=\alpha\cdot\delta+\alpha\leqslant\alpha\cdot\delta+\rho=\gamma.$$

这与 δ 的选取不符.

现假设 $\gamma=\alpha\cdot\beta+\rho_1=\alpha\cdot\delta+\rho_2$, 并且 $\rho_1,\rho_2<\alpha$. 如果 $\beta=\delta$, 那么, 根据定理 1.75 中的 (2), 必有 $\rho_1=\rho_2$.

欲得矛盾, 不妨假设 $\beta<\delta$. 从而, $\beta+1\leqslant\delta$,

$$\alpha\cdot\beta+(\alpha+\rho_2)=\alpha\cdot(\beta+1)+\rho_2\leqslant\alpha\cdot\delta+\rho_2=\gamma=\alpha\cdot\beta+\rho_1.$$

依此, 再根据引理 1.75 中的 (1), $\rho_1\geqslant\alpha+\rho_2\geqslant\alpha$. 这是一矛盾. □

定理 1.80 (康托尔范式) **如果 α 是一个非零的序数, 那么, α 可以唯一地写成如下一种规范形式:**

$$\alpha=\omega^{\beta_1}\cdot k_1+\omega^{\beta_2}\cdot k_2+\cdots+\omega^{\beta_n}\cdot k_n,$$

其中, $1\leqslant n<\omega$, $\beta_1>\beta_2>\cdots>\beta_n$ **以及** $0<\min(\{k_1,k_2,\cdots,k_n\})\leqslant\max(\{k_1,k_2,\cdots,k_n\})<\omega$.

证明　先用关于 α 的归纳法证明范式存在.

当 $1\leqslant\alpha=n<\omega$ 时, $\alpha=\omega^0\cdot n$.

设 $\alpha\geqslant\omega$. 根据引理 1.19 中的 (2), 令

$$\beta=\max\left(\{\delta\mid\omega^\delta\leqslant\alpha\}\right).$$

根据带余除法引理 1.20, 令 (δ,ρ) 为满足等式

$$\alpha=\omega^\beta\cdot\delta+\rho$$

的唯一序数对. 因为 $\omega^\beta\leqslant\alpha$ 以及 $\rho<\alpha$, 必有 $\delta>0$. 我们断言: $\delta<\omega$. 否则, 下述不等式

$$\alpha\geqslant\omega^\beta\cdot\delta\geqslant\omega^\beta\cdot\omega=\omega^{\beta+1}$$

表明 β 并非如所定义的. 于是, 令 $\beta_1=\beta$, $k_1=\delta$. $\alpha=\omega^{\beta_1}\cdot k_1+\rho$.

如果 $\rho=0$, 我们得到所要的. 不然, $1\leqslant\rho<\alpha$. 根据归纳假设,

$$\rho=\omega^{\beta_2}\cdot k_2+\omega^{\beta_3}\cdot k_3+\cdots+\omega^{\beta_n}\cdot k_n,$$

其中, $\beta_2>\beta_3>\cdots>\beta_n$ 以及 $0<k_2,k_3,\cdots,k_n$ 为自然数.

由于 $\rho < \omega^{\beta_1}$, 必有 $\omega^{\beta_2} \leqslant \rho < \omega^{\beta_1}$, 从而, $\beta_1 > \beta_2$. 这样,

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n,$$

其中, $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_n$, 以及 $0 < k_1, k_2, \cdots, k_n$ 为自然数.

现在来证明规范式之唯一性. 依旧对 α 施归纳.

当 $\alpha = 1$ 时, 唯一性自然.

现在设

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n = \omega^{\gamma_1} \cdot \ell_1 + \omega^{\gamma_2} \cdot \ell_2 + \cdots + \omega^{\gamma_m} \cdot \ell_m,$$

其中, $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_n$, $\gamma_1 > \gamma_2 > \cdots > \gamma_m$ 以及 $0 < k_1, k_2, \cdots, k_n$, $0 < \ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_m$ 为自然数.

根据引理 1.17 中的 (3), 如果 $\gamma > \beta_1$, 必有 $\alpha < \omega^{\gamma}$. 因此, 得出 $\beta_1 = \gamma_1$.

令 $\delta = \omega^{\beta_1} = \omega^{\gamma_1}$,

$$\rho = \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \omega^{\beta_3} \cdot k_3 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$$

以及

$$\sigma = \omega^{\gamma_2} \cdot \ell_2 + \omega^{\gamma_3} \cdot \ell_3 + \cdots + \omega^{\gamma_m} \cdot \ell_m.$$

我们便有

$$\alpha = \delta \cdot k_1 + \rho = \delta \cdot \ell_1 + \sigma.$$

由于 $\rho < \delta, \sigma < \delta$, 带余除法引理 1.20 蕴涵 $k_1 = \ell_1$ 和 $\rho = \sigma$.

应用关于规范式唯一性归纳假设, 我们得到 $m = n$,

$$\beta_i = \gamma_i, \quad k_i = \ell_i \quad (2 \leqslant i \leqslant m).$$

□

1.8.4　快速增长数论函数层次

作为康托尔范式的一种有趣的应用, 我们来定义一种快速增长数论函数层次, 并且展示一个可以揭示佩亚诺算术理论不完全性的递归全函数的例子.

定义 1.82　(1) 如下递归定义长度为 ω 的序数序列 $\langle \delta_n \mid n \in \omega \rangle$:

(a) $\delta_0 = \omega$;

(b) $\delta_{n+1} = \omega^{\delta_n}$.

(2) 定义 $\epsilon_0 = \sup(\{\delta_n \mid n \in \omega\})$.

引理 1.21　(1) $\forall \alpha\, (\alpha < \epsilon_0 \to \alpha < \omega^{\alpha} < \epsilon_0)$;

(2) $\omega^{\epsilon_0} = \epsilon_0$.

证明 (1) 首先, 根据 δ 序列的定义, 以及指数函数的单调性, 我们有

$$\forall n, m \in \omega\,(n < m \to \delta_n < \delta_m),$$

并且每一个 δ_n 和 ϵ_0 都是非零极限序数.

设 $\alpha < \epsilon_0$.

令 $m = \min(\{n \in \omega \mid \alpha \leqslant \delta_n\})$. 那么, $\alpha < \delta_{m+1}$, 从而,

$$\omega^\alpha < \omega^{\delta_{m+1}} = \delta_{m+2} < \epsilon_0.$$

对于 $\alpha \leqslant \omega$, 都有 $\alpha < \omega^\alpha$.

设 $\omega < \alpha = \beta + 1$. 归纳假设, $\beta < \omega^\beta$. 那么,

$$\alpha < \omega^\beta + 1 < \omega^\beta \cdot \omega = \omega^{\beta+1}.$$

设 $\omega < \alpha$ 是一个极限序数. 归纳假设, $\forall \beta < \alpha\,(\beta < \omega^\beta)$. 令

$$\ell = \min(\{k \in \omega \mid \delta_k < \alpha \leqslant \delta_{k+1}\}).$$

根据康托尔范式定理, 令

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \cdots + \omega^{\beta_m} \cdot k_m,$$

其中, $\beta_1 > \cdots > \beta_m$, $0 < m, k_1, \cdots, k_m < \omega$. 由于 α 是一极限序数, $\beta_m > 0$. 由 ℓ 的定义, 必有 $\beta_1 \leqslant \delta_\ell$. 因为如若不然, $\delta_\ell < \beta_1$, 则 $\omega^{\delta_\ell} < \omega^{\beta_1} \leqslant \alpha$. 从而, $\beta_m < \cdots < \beta_1 \leqslant \delta_\ell < \alpha$, 并且, 对于 $1 \leqslant i \leqslant m$ 都有

$$\beta_i < \omega^{\beta_i}, \quad \omega^{\beta_i} < \omega^{\omega^{\beta_i}}, \quad \omega^{\beta_i} \cdot k_i < \omega^{\omega^{\beta_i}} \cdot k_i < \omega^{\omega^{\beta_i} \cdot k_i}.$$

所以,

$$\begin{aligned}
\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \cdots + \omega^{\beta_m} \cdot k_m &< \omega^{\omega^{\beta_1}} \cdot k_1 + \cdots + \omega^{\omega^{\beta_m}} \cdot k_m \\
&< \omega^{\omega^{\beta_1} \cdot k_1} + \cdots + \omega^{\omega^{\beta_m} \cdot k_m} \\
&< \omega^{\omega^{\beta_1} \cdot k_1} \cdot \cdots \cdot \omega^{\omega^{\beta_m} \cdot k_m} \\
&= \omega^{\omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \cdots + \omega^{\beta_m} \cdot k_m} = \omega^\alpha.
\end{aligned}$$

(2) $\omega^{\epsilon_0} = \bigcup\{\omega^\alpha \mid \alpha < \epsilon_0\} \leqslant \epsilon_0 \leqslant \omega^{\epsilon_0}$. □

对于任何一个可数无限的极限序数 α 而言, 总能得到 α 的一个无界单增的长度为 ω 的序列. 但是, 对于有些可数序数 $\alpha \geqslant \omega$ 来说, 我们甚至可以定义出 α 的一个单增无界长度为 ω 的序列来.

定义 1.83 (基本序列)　对于每一个在区间 $[\omega, \epsilon_0]$ 中的极限序数 α, 如下递归地定义 $\sigma_\alpha : \omega \to \alpha$:

(1) $\forall n \in \omega\ (\sigma_\omega(n) = n)$.

(2) 设 $\omega < \alpha < \epsilon_0$ 为一极限序数, 并且, 对于区间 $[\omega, \alpha)$ 中的每一极限序数 γ, σ_γ 都已经被定义好. 令

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \cdots + \omega^{\beta_m} \cdot k_m,$$

其中, $\beta_1 > \cdots > \beta_m$, $0 < m, k_1, \cdots, k_m < \omega$. 由于 α 是一极限序数, $\beta_m > 0$.

(a) 如果 $m=1 \wedge k_1=1 \wedge \beta_1=\gamma+1$, 那么, 对于 $n \in \omega$, 令 $\sigma_\alpha(n)=\omega^\gamma \cdot n$;

(b) 如果 $m = 1 \wedge k_1 = 1 \wedge \beta_1$ 是一极限序数, 那么, 对于 $n \in \omega$, 令

$$\sigma_\alpha(n) = \omega^{\sigma_{\beta_1}(n)};$$

(c) 如果 $m=1 \wedge k_1>1$, 那么, 对于 $n\in\omega$, 令 $\sigma_\alpha(n)=\omega^{\beta_1}\cdot(k_1-1)+\sigma_{\omega^{\beta_1}}(n)$;

(d) 如果 $m > 1$, 令 $\gamma = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \cdots + \omega^{\beta_{m-1}} \cdot k_{m-1}$, 从而,

$$\alpha = \gamma + \omega^{\beta_m} \cdot (k_m - 1) + \omega^{\beta_m},$$

那么, 对于 $n \in \omega$, 令 $\sigma_\alpha = \gamma + \omega^{\beta_m} \cdot (k_m - 1) + \sigma_{\omega^{\beta_m}}(n)$.

(3) $\sigma_{\epsilon_0}(0) = 0$; $\forall n \in \omega\ (\sigma_{\epsilon_0}(n+1) = \omega^{\sigma_{\epsilon_0}(n)})$.

称 σ_α 为极限序数 $\alpha \in [\omega, \epsilon_0]$ 的**基本序列**.

引理 1.22　对于每一个极限序数 $\alpha \in [\omega, \epsilon_0]$, 其基本序列 σ_α 是一个收敛于 α 的长度为 ω 的单调递增序列, 就是说,

(1) $\forall n < m < \omega\ (\sigma_\alpha(n) < \sigma_\alpha(m) < \alpha)$;

(2) $\forall \beta < \alpha\ \exists n \in \omega\ (\beta < \sigma_\alpha(n))$.

证明　(练习.) □

定义 1.84　(1) 对于 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, 递归地定义 $\langle f^n \mid n \in \omega \rangle$ 如下:

$$f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}, \quad f^{n+1} = f \circ f^n \quad (n \in \omega).$$

(2) 对于每一个序数 $\alpha \in \epsilon_0 + 1$, 递归地定义 $F_\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 如下:

(a) 如果 $\alpha = 0$, 那么 $\forall n \in \omega\ (f_0(n) = n + 1)$;

(b) 如果 $\alpha = \beta + 1$, 那么 $\forall n \in \omega\ (f_\alpha(n) = f_\beta^n(n))$;

(c) 如果 α 是一个非零极限序数, 那么 $\forall n \in \omega\ (f_\alpha(n) = f_{\sigma_\alpha(n)}(n))$. 其中 $\langle \sigma_\gamma \mid \gamma \in [\omega, \epsilon_0] \wedge \gamma = \bigcup \gamma \rangle$ 是由定义 1.83 所给出的基本序列之序列.

定义 1.85　对于 $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, 称 g**几乎处处大于**f, 记成 $f <^* g$, 当且仅当自某个自然数之后 $g(n)$ 总比 $f(n)$ 大, 即

$$f <^* g \leftrightarrow \exists m \in \omega\, \forall n \in \omega\, (m < n \to f(n) < g(n)).$$

关于这个快速增长的算术函数序列 $\langle f_\alpha \mid \alpha \leqslant \epsilon_0\rangle$, 我们有如下定理:

定理 1.81 (1) 对于每一个 $\alpha \leqslant \epsilon_0$, f_α 都是图灵可计算的全函数 (递归全函数);

(2) 如果 $\alpha < \beta \leqslant \epsilon_0$, 那么 $f_\alpha <^* f_\beta$;

(3) 如果 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是一个初等递归函数, 那么 $f <^* f_\omega$;

(4) 对于每一个 $\alpha < \epsilon_0$, 在佩亚诺算术理论中可以证明 f_α 是全函数;

(5) 如果在佩亚诺算术理论中可以证明 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是一个递归全函数, 那么

$$\exists\alpha < \epsilon_0\ (f <^* f_\alpha);$$

(6) 佩亚诺算术理论不可以证明 f_{ϵ_0} 是全函数.

定义 1.86 设 $b\in\mathbb{N}$ 且 $1<b$, $m\in\omega$ 是任意一个自然数.

(1) 如果 $m\leqslant b$, 那么 m 的**以 b 为基的完全展开项** $\tau_b(m)=m$.

(2) 设 $b<m$, 并且对于每一个 $\ell<m$, ℓ 的以 b 为基的完全展开项 $\tau_b(\ell)$ 都已经有确切定义. 那么, m 的以 b 为基的完全展开项 $\tau_b(m)$ 定义如下:

$$\tau_b(m)=b^{\tau_b(n_1)}\cdot k_1+b^{\tau_b(n_2)}\cdot k_2+\cdots+b^{\tau_b(n_\ell)}\cdot k_\ell,$$

其中

$$m=b^{n_1}\cdot k_1+b^{n_2}\cdot k_2+\cdots+b^{n_\ell}\cdot k_\ell,$$

并且 $n_1>n_2>\cdots>n_\ell\geqslant 0$; $\forall 1\leqslant i\leqslant \ell\ (0<k_i<b)$;

注意, 将一个自然数 m 展开写成它的以 b 为基的完全展开项是可以用计算机递归程序实现的任务, 也就是说是一个可计算的过程.

例 1.29 $37=2^5+2^2+1=2^{2^2+1}+2^2+1$, $\tau_2(37)=2^{2^2+1}+2^2+1$;

现在我们来定义从任意大于零的自然数 m 开始的**顾德斯坦序列**[22]:

定义 1.87 (顾德斯坦序列) 设 $0<m<\omega$.

(1) $m_0=m$.

(2) 给定 m_k, 将 m_k 写成以 $b=k+2$ 为基的完全展开项 $\tau_{k+2}(m_k)$; 将项 $\tau_{k+2}(m_k)$ 中的每一个 b 的出现改写成 $b+1$(或者说, 用 $b+1$ 在这个项中替换每一个 b 的出现), 所得到的是某个自然数 n_k 的以 $b+1=k+3$ 为基的完全展开项 $\tau_{k+3}(n_k)$; 令 $m_{k+1}=n_k-1=\tau_{k+3}(n_k)-1$.

例 1.30 $m_0=21=2^{2^2}+2^2+1$;

$m_1=3^{3^3}+3^3$;

$m_2=4^{4^4}+4^4-1=4^{4^4}+4^3\cdot 3+4^3\cdot 3+4^2\cdot 3+4\cdot 3+3$;

$m_3=5^{5^5}+5^3\cdot 3+5^3\cdot 3+5^2\cdot 3+5\cdot 3+2$;

22 Goodstein sequences, 由 Reuben Goodstein 在 1944 年引入.

$m_4 = 6^{6^6} + 6^3 \cdot 3 + 6^3 \cdot 3 + 6^2 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 1$;
$m_5 = 7^{7^7} + 7^3 \cdot 3 + 7^3 \cdot 3 + 7^2 \cdot 3 + 7 \cdot 3$;
$m_6 = 8^{8^8} + 8^3 \cdot 3 + 8^3 \cdot 3 + 8^2 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 7$;
$m_7 = 9^{9^9} + 9^3 \cdot 3 + 9^3 \cdot 3 + 9^2 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 6$;
等等.

尽管顾德斯坦序列开始总是在增长, 但它总能在有限步内达到最大值, 然后开始在有限步之内收敛到 0.

定理 1.82 (顾德斯坦定理)　$\forall m \in \omega\ (0 < m \to \exists n \in \omega\ (m_n = 0))$.

证明　给定非零的自然数 m, 对于每一个 m_k, 将 m_k 写成以 $k+2$ 为基的完全展开项 $\tau_{k+2}(m_k)$. 将这个项 $\tau_{k+2}(m_k)$ 中的每一个 $k+2$ 的出现用序数 ω 替换, 得到序数 α_k 的康托尔范式 $\tau_\omega(\alpha_k)$.

令 $b = k+2$. 如果在项 $\tau_b(m_k)$ 中没有 b 出现 (不算 b^0 在内), 那么, m_k 便是一个小于 b 的数, 从而在序列的定义中, 很快就变成 0. 如果在项 $\tau_b(m_k)$ 中有 b 出现并且它的最后一项是一个大于 0 小于 b 的数, 那么, $\alpha_k = \alpha_{k+1} + 1$. 如果在项 $\tau_b(m_k)$ 中有 b 出现并且它的最后一项是 b 的倍数, 那么, $\alpha_k \geqslant \alpha_{k+1} + \omega$. 因此, 如果在项 $\tau_b(m_k)$ 中有 b 出现, 那么 $\alpha_k > \alpha_{k+1}$. 于是, 必有 $k \in \omega$ 满足在项 $\tau_b(m_k)$ 中没有 b 出现. 因为不可能有无穷单调递减序数序列

$$\alpha_0 > \alpha_1 > \cdots > \alpha_k > \cdots.$$

□

例 1.31　$m_0 = 21 = 2^{2^2} + 2^2 + 1$;
$\alpha_0 = \omega^{\omega^\omega} + \omega^\omega + 1$;
$m_1 = 3^{3^3} + 3^3$;
$\alpha_1 = \omega^{\omega^\omega} + \omega^\omega$;
$m_2 = 4^{4^4} + 4^4 - 1 = 4^{4^4} + 4^3 \cdot 3 + 4^3 \cdot 3 + 4^2 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 3$;
$\alpha_2 = \omega^{\omega^\omega} + \omega^3 \cdot 3 + \omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 3 + 3$;
$m_3 = 5^{5^5} + 5^3 \cdot 3 + 5^3 \cdot 3 + 5^2 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 2$;
$\alpha_3 = \omega^{\omega^\omega} + \omega^3 \cdot 3 + \omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 3 + 2$;
$m_4 = 6^{6^6} + 6^3 \cdot 3 + 6^3 \cdot 3 + 6^2 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 1$;
$\alpha_4 = \omega^{\omega^\omega} + \omega^3 \cdot 3 + \omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 3 + 1$;
$m_5 = 7^{7^7} + 7^3 \cdot 3 + 7^3 \cdot 3 + 7^2 \cdot 3 + 7 \cdot 3$;
$\alpha_5 = \omega^{\omega^\omega} + \omega^3 \cdot 3 + \omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 3$;
$m_6 = 8^{8^8} + 8^3 \cdot 3 + 8^3 \cdot 3 + 8^2 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 7$;
$\alpha_6 = \omega^{\omega^\omega} + \omega^3 \cdot 3 + \omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 2 + 7$;
$m_7 = 9^{9^9} + 9^3 \cdot 3 + 9^3 \cdot 3 + 9^2 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 6$;
$\alpha_7 = \omega^{\omega^\omega} + \omega^3 \cdot 3 + \omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 2 + 6$;
等等.

定义 1.88 (顾德斯坦函数)　定义 $G(0)=0$; 对于 $m\in\mathbb{N}$ 非零, 定义

$$G(m)=\min(\{k\in\mathbb{N}\mid m_k=0\}).$$

称此函数 G 为**顾德斯坦函数**.

根据顾德斯坦定理, 顾德斯坦函数之定义是确定无疑的. 根据顾德斯坦序列之可计算性, 顾德斯坦函数 G 实际上是一个图灵机可计算的全函数. 但是, 佩亚诺算术理论却不可以证明这个在 $\mathbb{N}$ 上处处有定义的递归函数处处有定义.

定理 1.83 (科比–巴黎)　佩亚诺算术理论不可以证明顾德斯坦函数是一个递归全函数.

事实上, 已知 $\exists n\,(G<^* f_{\epsilon_0}^n)$ 以及 $\exists m\,(f_{\epsilon_0}<^* G^m)$.

1.9 基　数

问题 1.5　对于一个秩序集合来说, 它上面可以有多少种不同构的秩序呢?

任何一个有限秩序集合之上的秩序总是彼此同构的, 这个问题只对于无穷秩序集合来说有意义.

我们先来看看这个问题最简单的情形：自然数集合上可以有多少种彼此不同构的秩序?

为此, 我们先引进两个谓词：

$W(R,A)\leftrightarrow R$ 是 A 上的一个秩序.

$\mathrm{Wo}(X)=\{R\subset X\times X\mid \exists A\subseteq X\, W(R,A)\}$.

如果 $W(R,A)$, 令 $\mathrm{ot}(R)=\mathrm{ot}(A,R)$.

定理 1.84　存在一个具有后述特性的序数 α: $\forall R\in\mathrm{Wo}(\omega)\,\exists\beta\in\alpha\,(\beta=\mathrm{ot}(R))$.

证明　对于任意一个 $R\in\mathrm{Wo}(\omega)$, 令 $A=\mathrm{dom}(R)\cup\mathrm{rng}(R)$, 由表示定理我们知道存在唯一一个和 (A,R) 同构的序数, 根据映像存在原理, 如下定义了一个集合：

$$D=\{\alpha\mid \exists R\,(R\in\mathrm{Wo}(\omega)\wedge \alpha=\mathrm{ot}(R))\}.$$

那么, D 是序数的一个传递集合, 从而是一个序数. D 就是一个我们希望得到的序数. □

定义 1.89　$\omega_1=\omega^+=\min\left(\{\alpha\mid \forall R\in\mathrm{Wo}(\omega)\,\exists\beta\in\alpha\,(\beta=\mathrm{ot}(R))\}\right)$.

定理 1.85　(1) $|\omega|<|\omega_1|$.

(2) 如果 $\omega\in\alpha$ 为序数, 且 $|\omega|<|\alpha|$, 那么 $\omega_1\leqslant\alpha$.

(3) 如果 $\omega\in\alpha\in\omega_1$, 那么 $|\omega|=|\alpha|$; 从而, $\forall\beta\in\omega_1\,(|\beta|<|\omega_1|)$.

证明　(1) 由于 $|\omega| \leqslant |\omega_1|$, 如果 ω 不比 ω_1 弱势, 它们必然等势. 设 $f : \omega \to \omega_1$ 为一个双射. 令

$$\forall m \in \omega \, \forall n \in \omega \, (m <_f n \leftrightarrow f(m) < f(n)) \, ,$$

那么, $<_f$ 是 ω 上的一个秩序, 且其序型为 ω_1. 令 m_0 满足 $f(m_0) = 0$, 令

$$<_f^* = <_f \cap (\omega - \{m_0\})^2 \cup \{(n, m_0) \mid n \in (\omega - \{m_0\})\}.$$

就是说, 将 m_0 置放为 $<_f^*$- 最大元, 其余的序关系不变. 那么, $(\omega, <_f^*) \cong (\omega_1 + 1, <)$. 这与 ω_1 之定义不符.

(2) 设 α 是一个不可数序数. 又设 γ 是某个 $R \in \mathrm{Wo}(\omega)$ 的序型. 那么 γ 是一个可数序数. 由于序数之间可比较, 且 $\alpha \not\subseteq \gamma$, 必有 $\gamma \in \alpha$.

(3) 由 (1) 和 (2) 即得. □

由此定理, 我们得到第一个不可数的序数 ω_1, 也就是最小的不可数序数. 上述关于 ω 的定理自然推广到任意的无穷序数之上.

定理 1.86　设 α 为任意一个大于或等于 ω 的序数, 那么必存在一个满足如下要求的序数 λ:

$$\forall R \in \mathrm{Wo}(\alpha) \, \exists \beta \in \lambda \, (\beta = \mathrm{ot}(R)).$$

证明　(练习.) □

定义 1.90　任意一个大于或等于 ω 的序数 α, 我们定义

$$\alpha^+ = \min \left(\{\lambda \mid \forall R \in \mathrm{Wo}(\alpha) \, \exists \beta \in \lambda \, (\beta = \mathrm{ot}(R))\} \right).$$

定理 1.87　设 $\omega \leqslant \alpha$ 为序数. 那么

(1) $|\alpha| < |\alpha^+|$;

(2) 如果 $\alpha \in \gamma$ 为序数, 且 $|\alpha| < |\gamma|$, 那么 $\alpha^+ \leqslant \gamma$;

(3) 如果 $\alpha \in \beta \in \alpha^+$, 那么 $|\alpha| = |\beta|$; 从而, $\forall \beta \in \alpha^+ \, (|\beta| < |\alpha^+|)$.

证明　(练习.) □

于是, 对于无穷序数 α 而言, α^+ 是最小的比 α 强势的序数; 总存在比任意给定的序数强势的序数; 从而, 序数之间势的比较便是一个非常有意义的关系.

定义 1.91 (序数之势)　对于任意的一个序数 α 而言, α **之势**, 记成 $|\alpha|$, 是与 α 等势的最小序数, 即

$$|\alpha| = \min \left(\{\beta \in (\alpha + 1) \mid |\beta| = |\alpha|\} \right).$$

定义 1.92 (基数)　(1) 一个序数 α 是一个**基数**当且仅当 $\alpha = |\alpha|$;

(2) 一个基数 λ 是一个**后继基数**当且仅当 $\exists \beta \in \lambda \, (\lambda = \beta^+)$;

(3) 一个基数 λ 是一个**极限基数**当且仅当 $\forall \beta < \lambda \, (\beta^+ < \lambda)$.

命题 1.27 (1) $\forall n \in \omega\,(|n| = n)$; 从而, 每一个自然数都是一个基数;

(2) $\omega = |\omega|$, ω 是第一个无穷基数;

(3) $\omega_1 = |\omega_1|$, ω_1 是第一个不可数基数;

(4) $\forall \alpha \geqslant \omega\,(|\alpha| \leqslant \alpha < \alpha^+ = |\alpha^+|)$, 从而每一 α^+ 都是一个基数;

(5) 序数 α 是一个基数当且仅当 $\forall \beta \in \alpha\,(|\beta| < |\alpha|)$ 当且仅当

$$\forall R \in \mathrm{Wo}(\alpha)\,(\alpha \leqslant \mathrm{ot}(R)).$$

证明 (5) 如果 $\alpha = |\alpha|$, 自然由定义得到: $\forall \beta \in \alpha\,(|\beta| < |\alpha|)$.

条件也是充分的: 如果 $\beta \in \alpha$, 那么 $|\beta| < |\alpha|$, 从而 $\beta < |\alpha|$. □

定理 1.88 如果 α 是一个正则序数, 那么 α 是一个基数.

证明 设 $\alpha \geqslant \omega$ 是一个极限序数, 并且 $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$.

假设 $|\alpha| < \alpha$. 令 $\beta = |\alpha|$. 那么, $\beta \geqslant \omega$ 必是一个极限序数.

令 $f : \beta \to \alpha$ 为一个双射. 又令 $g : \mathrm{cf}(\beta) \to \beta$ 为一个在 β 中单增无界的函数. 由于 $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$, 对于 $\gamma \in \beta < \mathrm{cf}(\alpha)\, f[\gamma]$ 是 α 的一个有界子集. 于是, 对于 $\xi \in \mathrm{cf}(\beta)$, 令

$$h(\xi) = \sup(f[g(\xi)]) < \alpha.$$

$h[\mathrm{cf}(\beta)]$ 是 α 的一个无界子集, 并且 $\mathrm{ot}(h[\mathrm{cf}(\beta)]) \leqslant \mathrm{cf}(\beta) \leqslant \beta < \mathrm{cf}(\alpha)$. 这是一个矛盾. □

定理 1.89 (基数连续性) 如果 X 是基数的一个非空集合, 那么 $\bigcup X$ 是一个基数; 并且如果 X 没有最大元, 则 X 中的任何一个基数都比 $\bigcup X$ 弱势.

证明 设 X 是基数的一个非空集合. 令 $\lambda = \bigcup X$. 那么 λ 是一个序数. 令 $\alpha \in \lambda$, 那么 α 是 X 中的某个基数 γ 的元素, 从而 $|\alpha| < \gamma = |\gamma| \leqslant \lambda$. □

我们如下递归地定义无穷基数序列:

定义 1.93 (无穷基数序列) (1) $\aleph_0 = \omega_0 = \omega$;

(2) 对于任意一个序数 α, $\aleph_{\alpha+1} = \omega_{\alpha+1} = \omega_\alpha^+$;

(3) 对于任意一个非零极限序数 γ, $\aleph_\gamma = \omega_\gamma = \bigcup\{\omega_\alpha \mid \alpha < \gamma\}$.

我们用 $\aleph$(念成 "阿列夫") 序列来标识无穷基数序列; 而用 ω 序列来标识相应的无穷基数的序型.

例 1.32 $\aleph_0$ 是一个极限基数; $\aleph_{n+1}$ 是一个不可数的后继基数; 第一个不可数的极限基数为 $\aleph_\omega$.

引理 1.23 $\forall \alpha \in \mathrm{Ord}\,(\alpha \leqslant \omega_\alpha)$.

证明 对 α 施归纳. □

定理 1.90 每一个 $\aleph_\alpha$ 都是一个无穷基数; 如果 λ 是一个无穷基数, 那么 λ 必是某一个 $\aleph_\alpha$.

证明　由前面的命题 1.27 以及基数连续性定理 (定理 1.89) 即知每一个 $\aleph_\alpha$ 都是一个无穷基数.

根据上面的引理 1.23, 如果 λ 是一个无穷基数, 那么 λ 必小于某个 ω_α. 因此, 下面的命题蕴涵了定理中的第二个命题：

对于每一个无穷基数 $\lambda < \omega_\alpha$, 都一定存在一个序数 $\gamma < \alpha$ 来实现等式 $\lambda = \omega_\gamma$.

我们用关于 α 的归纳法来证明这个命题.

当 $\alpha = 0$ 时, 命题自然成立.

假设 $\alpha = \beta + 1$. $\lambda < \omega_{\beta+1}$ 是一个无穷基数. 那么 $\lambda \leqslant \omega_\beta$. 如果 $\lambda = \omega_\beta$, 命题得证; 不然, $\lambda < \omega_\beta$, 依据归纳假设, 命题得证.

假设 $\alpha > 0$ 是一个极限序数. $\lambda < \omega_\alpha$ 是一个无穷基数. 那么必有一个序数 $\gamma < \alpha$ 来见证不等式 $\lambda \leqslant \omega_\gamma$; 再由归纳假设, 命题得证.

综合上述, 我们得到：每一个无穷基数都是某个 $\aleph_\alpha$. □

定理 1.91 (不动点定理)　(1) *如果 $\alpha < \beta$ 为两个序数, 那么 $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$;*

(2) $\forall \alpha \in \mathrm{Ord}\, \exists \gamma \in \mathrm{Ord}\, (\alpha < \gamma \wedge \gamma = \aleph_\gamma)$.

证明　(1) 假设命题不成立. 令

$$\beta_0 = \min(\{\beta \mid \exists \alpha < \beta\, (\aleph_\alpha \geqslant \aleph_\beta)\})$$

以及

$$\alpha_0 = \min(\{\alpha < \beta_0 \mid \aleph_\alpha \geqslant \aleph_{\beta_0}\}).$$

如果 $\beta_0 = \gamma + 1$, 那么, $\alpha_0 \leqslant \gamma$, 从而, $\aleph_{\alpha_0} \leqslant \aleph_\gamma < \aleph_{\beta_0}$; 如果 β_0 是一个极限序数, 那么, $\alpha_0 + 1 < \beta_0$, 从而, $\aleph_{\alpha_0} < \aleph_{\alpha_0+1} \leqslant \aleph_{\beta_0}$. 无论如何, 都是一个矛盾.

(2) 给定序数 α, 令 $\gamma_0 = \aleph_{\alpha+1}$. 那么, $\alpha \leqslant \aleph_\alpha < \gamma_0$. 递归地, 对于 $n \in \omega$, 令

$$\gamma_{n+1} = \aleph_{\gamma_n+1}.$$

那么, $\gamma_{n+1} > \gamma_n$, 并且每一个 γ_n 都是一个基数. 令

$$\gamma = \bigcup\{\gamma_n \mid n \in \omega\}.$$

于是, γ 是一个基数, 并且对于每一 $n \in \omega$ 都有 $\gamma_n < \aleph_{\gamma_n+1} < \gamma$.

如果 $\beta < \gamma$, 那么 $\exists n \in \omega\, (\beta < \gamma_n)$; 对于这样的 $n \in \omega$, 必有

$$\aleph_\beta < \aleph_{\gamma_n} < \gamma_{n+1} < \gamma.$$

如果 $\gamma < \beta$, 那么 $\aleph_\gamma < \aleph_\beta$. 根据上面的定理, $\exists \delta \in \mathrm{Ord}\, (\gamma = \aleph_\delta)$. 因此, $\gamma = \aleph_\gamma$. (注意, $\mathrm{cf}(\gamma) = \omega$.) □

定义 1.94 (奇异基数)　称一个基数 κ 为一个**奇异基数**当且仅当 $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$; 称一个基数 κ 为一个**正则基数**当且仅当 $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$.

例 1.33　ω 是一个正则极限基数. $\aleph_\omega$ 是一个奇异基数. 上面不动点定理的证明表明存在任意大的梯度为 ω 的奇异极限基数.

命题 1.28　如果 $\alpha \geqslant \omega$ 为一个极限序数, 那么 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 是一个正则基数, 从而, 每一个正则序数都是一个正则基数; 如果 $\kappa > \omega$ 是一个正则极限基数, 那么 $\kappa = \aleph_\kappa$.

证明　设 $\alpha \geqslant \omega$ 是一个极限序数. 令 $\gamma = \mathrm{cf}(\alpha)$. 根据定理 1.70, γ 是一个正则序数; 根据定理 1.88, γ 是一个基数. 因此, γ 是一个正则基数. 如果 α 是一个正则序数, 那么 $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$, 所以, α 是一个正则基数.

设 $\kappa > \omega$ 是一个正则极限基数. 令 $\kappa = \aleph_\beta$. 那么 β 是一个极限序数, 并且 $\mathrm{cf}(\beta) = \beta \leqslant \kappa$. 我们来证明 $\beta = \kappa$. 事实上, 我们应用归纳法来证明：

$$\forall \alpha < \kappa \, (\aleph_\alpha < \kappa).$$

当 $\alpha = 0$ 时, $\alpha_0 = \omega < \kappa$. 当 $\alpha = \gamma + 1$ 时, 根据归纳假设以及 κ 是一个极限基数的假设就得到所要的结论.

现在设 $\alpha < \kappa$ 是一个极限序数. 那么, $\mathrm{cf}(\alpha) < \kappa = \mathrm{cf}(\kappa)$. 令 $f : \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$ 为一个在 α 中单增无界的序列. 那么,

$$\aleph_\alpha = \bigcup \{\aleph_\gamma \mid \gamma < \alpha\} = \bigcup \{\aleph_{f(\gamma)} \mid \gamma < \mathrm{cf}(\alpha)\}.$$

由归纳假设, 每一个 $\aleph_{f(\gamma)} < \kappa$; 由于序列 $\langle \aleph_{f(\gamma)} \mid \gamma < \mathrm{cf}(\alpha) \rangle$ 在 $\aleph_\alpha$ 中单增无界, $\aleph_\alpha \leqslant \kappa$, 以及

$$\mathrm{cf}(\alpha) < \mathrm{cf}(\kappa) = \kappa,$$

这个序列必然在 κ 中有界. 因此, $\aleph_\alpha < \kappa$. □

问题 1.6　是否每一个奇异基数都一定是一个极限基数? 也就是问是否存在奇异的后继基数?

问题 1.7 (基数列表正则序数不动点问题)　在 $\aleph$ 的诸多不动点之中是否有一个正则序数 α? 等价地, 是否存在正则极限基数?

这个问题是一个独立于我们的基本公理系统的问题：任何一个这样的不动点都会是一个 “大基数”, 一种高阶无穷假设.

推论 1.12　一个无穷集合 X 是可秩序化的充分必要条件是 X 与某一个基数 $\aleph_\alpha$ 等势.

定义 1.95 (势)　当一个集合 X 是可秩序化时, 我们定义 X 的**势**, 记成 $|X|$, 为同它等势的唯一的基数; 当一个集合 X 是不可秩序化时, 我们定义 X 的**势**为如

下的集合, 也记成 $|X|$:

$$|X| = \{y \mid |y| = |X| \wedge \forall z\,(|z| = |X| \to \mathrm{RK}(y) \leqslant \mathrm{RK}(z))\}.$$

命题 1.29　$|X| = |Y|$ 当且仅当 X 和 Y 具有相同的势.

命题 1.30　设 $\kappa \geqslant \omega$ 是一个正则基数.

(1) 如果 $X \subset \kappa$, 并且 $|X| < \kappa$, 那么 X 在 κ 中一定有界;

(2) 如果 $\lambda < \kappa$, $f : \lambda \to \kappa$, 那么 $f[\lambda]$ 一定在 κ 中有界.

证明　(练习.) □

问题 1.8 (连续统问题)　如果 $\mathfrak{P}(\omega)$ 是可秩序化的集合, $\mathfrak{P}(\omega)$ 与 $\aleph_\alpha$ 等势, 那么 $\alpha \geqslant 1$ 是哪一个序数?

假设 1 (连续统假设)　$|\mathfrak{P}(\omega)| = \aleph_1$.

根据哥德尔 1938 年的工作以及科恩[23] 1963 年的工作, 康托尔连续统问题是一个独立于集合论公理系统 (ZFC) 的问题.

1.9.1　基数之和与积

定义 1.96　设 κ 和 λ 是两个基数.

(1) 基数 κ 与基数 λ 之和, 记成 $\kappa + \lambda$, 为

$$\begin{aligned}\kappa + \lambda &= \min\left(\{\gamma \mid |\gamma| = |\kappa \cup \{\kappa + \beta \mid \beta \in \lambda\}|\}\right) \\ &= \min\left(\{\gamma \mid |\gamma| = |\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}|\}\right).\end{aligned}$$

(2) 基数 κ 与基数 λ 之积, 记成 $\kappa \cdot \lambda$, 为

$$\kappa \cdot \lambda = \min\left(\{\gamma \mid \exists R \in \mathrm{Wo}(\kappa \times \lambda)\ ((\kappa \times \lambda, R) \cong (\gamma, <))\}\right).$$

引理 1.24　设 κ 和 λ 是两个基数. 那么,

(1) $\kappa + \lambda$ 与 $\kappa \cdot \lambda$ 都是基数.

(2) 如果 X 和 Y 是任意两个集合, 并且 $|X| = |\kappa| = \kappa$, $|Y| = |\lambda| = \lambda$, $X \cap Y = \varnothing$, 那么,

$$\kappa + \lambda = |\kappa + \lambda| = |X \cup Y|.$$

(3) 如果 X 和 Y 是任意两个集合, 并且 $|X| = |\kappa| = \kappa$, $|Y| = |\lambda| = \lambda$, 那么,

$$\kappa \cdot \lambda = |\kappa \cdot \lambda| = |X \times Y|.$$

引理 1.25　设 κ, λ 和 μ 是三个基数. 那么,

(1) $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$; $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$;

(2) $\kappa + (\lambda + \mu) = (\kappa + \lambda) + \mu$; $\kappa \cdot (\lambda \cdot \mu) = (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu$;

(3) $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$.

23 Paul Cohen.

1.9.2 序数乘积空间上的典型秩序

定义 1.97 我们定义两个序数的有序对的**典型序**如下: 设 (α,β) 和 (γ,δ) 分别为两个序数的有序对.

(1) 如果 $\max\{\alpha,\beta\}<\max\{\gamma,\delta\}$, 那么令 $(\alpha,\beta)<(\gamma,\delta)$;

(2) 如果 $\max\{\alpha,\beta\}=\max\{\gamma,\delta\}$ 而且 $\alpha<\gamma$, 那么令 $(\alpha,\beta)<(\gamma,\delta)$;

(3) 如果 $\max\{\alpha,\beta\}=\max\{\gamma,\delta\}$, $\alpha=\gamma$, 而且 $\beta<\delta$, 那么令 $(\alpha,\beta)<(\gamma,\delta)$.

关于序数乘积空间典型序的几何解释: 任意给定一个序数的有序对 (α,β), 考虑这一点所在的正方块, 由 $\gamma=\max\{\alpha,\beta\}$ 所唯一确定的正方块的上边界

$$\{(\eta,\gamma)\mid\eta<\gamma\}$$

和右边界

$$\{(\gamma,\eta)\mid\eta\leqslant\gamma\},$$

并且规定: 当一个序数的有序对 (x,y) 的 $\max\{x,y\}<\gamma$ 时, 这一点 (x,y) 就落在这个正方块的内部 (一个内点); 当 $\max\{x,y\}>\gamma$ 时, 这一点 (x,y) 就落在这个正方块的外部 (一个外点); 在 $\max\{x,y\}=\gamma$ 时, 这一点就落在这个正方块的两条边界上 (一个边界点). 上述典型序实际上就是规定这个正方块的两条边界上的任意一点都大于这个正方块的任意一个内点, 小于这个正方块的任意一个外点; 这个正方块的上边界的任意一点都小于右边界的任意一点; 而上边界上的点则按照从左到右排出从小到大的顺序, 右边界上的点则按照自下而上排出从小到大的顺序.

所以, 归纳起来: 内点小于边界点, 边界点小于外点, 上边界点小于右边界点, 上边界点中的左边的点小于右边的点, 右边界点中的下面的小于上面的, 而且传递性总是自然而然的. 这就是序数乘积空间上的典型序.

定理 1.92 (1) 序数有序对之间的典型序是 $\mathrm{Ord}\times\mathrm{Ord}$ 上的一个泛线性序.

(2) 如果 $X\subseteq\mathrm{Ord}\times\mathrm{Ord}$ 是序数有序对的一个非空集合, 那么 X 有一个在此典型序之下的最小元.

(3) 对任意的序数 α, $\alpha\times\alpha=\{(\gamma,\delta)\in\mathrm{Ord}\times\mathrm{Ord}\mid(\gamma,\delta)<(0,\alpha)\}$.

证明 (练习.) □

定义 1.98 对于任意的一个序数的有序对 (α,β) 而言, 它的 Gödel-编码, 记成 $\prec\alpha,\beta\succ$, 就是那个与如下在典型序之下的秩序集合同构的唯一的序数:

$$\{(\xi,\eta)\mid(\xi,\eta)<(\alpha,\beta)\}.$$

对于任意的一个序数的有序对 (α,β), 我们定义 $\Gamma(\alpha,\beta)=\prec\alpha,\beta\succ$.

命题 1.31 Gödel-编码映射 $\Gamma:(\mathrm{Ord}\times\mathrm{Ord},<)\to(\mathrm{Ord},<)$ 是一个保序类映射 (泛函), 而且每一个序数都是某一个序数有序对的 Gödel-编码.

定理 1.93 $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$.

证明 我们用前面定义的 Gödel- 编码映射 Γ. 我们断言:

$$\forall\alpha\,(\alpha \in \mathrm{Ord} \to \Gamma[\omega_\alpha \times \omega_\alpha] = \omega_\alpha).$$

首先, $\Gamma[\omega_\alpha \times \omega_\alpha] = \Gamma(0, \omega_\alpha) \geqslant \omega_\alpha$.

当 $\alpha = 0$ 时, 我们已知 $\Gamma[\omega \times \omega] = \omega$.

现在假设 $\alpha > 0$ 是最小的反例. 令 $\beta, \gamma < \omega_\alpha$ 满足如下方程:

$$\Gamma(\beta, \gamma) = \omega_\alpha.$$

取一个满足后面不等式的序数 δ: $\max\{\beta, \gamma\} < \delta < \omega_\alpha$. 由于 $\delta \times \delta$ 在序数有序对的典型序之下是由 $(0, \delta)$ 所决定的一个线段, 而且 $(\beta, \gamma) \in \delta \times \delta$, 我们有

$$\omega_\alpha \subseteq \Gamma[\delta \times \delta].$$

因此, $\aleph_\alpha \leqslant |\delta \times \delta|$. 但是, $\omega < \delta$, 存在满足不等式 $0 \leqslant \xi < \alpha$ 以及方程 $|\delta| = \aleph_\xi$ 的序数 ξ, 由 α 的极小性,

$$|\delta \times \delta| = |\delta| \cdot |\delta| = |\delta| < \aleph_\alpha.$$

矛盾. □

推论 1.13 $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \max\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\}$.

证明 不妨假设 $\alpha \geqslant \beta$. 于是,

$$\aleph_\alpha + \aleph_\beta \leqslant \aleph_\alpha + \aleph_\alpha = \aleph_\alpha \cdot 2 \leqslant \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta \leqslant \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha \leqslant \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha.$$ □

1.10 传 递 化

1.10.1 传递集合之刚性

在这里, 我们将序数理论中的许多性质推广到传递集合之上, 会看到序数中的许多基本性质在 $\in$-极小原理之下对于传递集合都成立. 我们先从归纳法开始.

定理 1.94 ($\in$-归纳法) 设 $\varphi(u)$ 为一个表达式. 假定

(1) $\varphi(\varnothing)$ 成立;

(2) 对于任意的一个集合 x, 我们都有 $((\forall y\,(y \in x \to \varphi(y))) \to \varphi(x))$,

那么, 对于任意的集合 x, 都有 $\varphi(x)$.

证明 假定定理中的结论不成立. 令 x 为一个反例. 令 $y = \mathcal{TC}(\{x\})$ 为 $\{x\}$ 的传递闭包. 于是,

$$A = \{a \in y \mid \neg(\varphi(a))\}$$

是一个非空集合. 取 $a \in A$ 为 A 的 $\in$-极小元. 因为 $\varphi(\varnothing)$, $a \neq \varnothing$. 由极小特性, 我们有 $\forall b\,(b \in a \to \varphi(b))$. 但由 (2), 我们必有 $\varphi(a)$. 矛盾. □

前面我们知道如果两个序数同构那么它们必定同一. 这里我们可以证明一个更一般的定理: 任意两个同构的传递集合必定同一.

定理 1.95 (传递集合刚性定理) 设 M 和 N 为两个传递集合. 又设

$$f : (M, \in) \to (N, \in)$$

为一个同构映射, 即 f 是一个双射而且

$$\forall x\, \forall y\, ((x \in M \wedge y \in M) \to (x \in y \leftrightarrow f(x) \in f(y))).$$

那么 $M = N$ 而且 f 是 M 上的恒等映射.

证明 设 M 和 N 是两个传递集合, 并且 $f : M \to N$ 是 $\in$- 同构映射. 如果 M 是空集, 那么 N 也是空集. 现在假设 M 非空. 那么 M 和 N 的 $\in$-极小元都是 $\varnothing$.

我们用 $\in$-归纳法证明 $\forall x\,(x \in M \to f(x) = x)$.

必然地, $f(\varnothing) = \varnothing$.

现在设 $x \in M$ 而且 $\forall a\,(a \in x \to f(a) = a)$. 令 $y = f(x)$.

首先, 我们有 $x \subseteq y$. 这是因为 f 是一个 $\in$-同构而且 $f \restriction x$ 是 x 上的恒等映射. 其次, $y \subseteq x$. 为此, 取 $b \in y$. 因为 $y \subseteq N$, f 是一个双射, 方程 $b = f(z)$ 在 M 中有唯一解 a. 于是, $a \in x$ (因为 $f(a) \in f(x)$). 由于 $a \in x$, $f(a) = a$. 因此, $b = a$. 由此, $y \subseteq x$.

所以, $\forall x\,(x \in M \to f(x) = x)$, 从而, $M = N$ 而且 f 是恒等映射. □

同样地, 我们得到 V 上的 $\in$-自同构只有恒等映射.

定理 1.96 ($\in$-递归定义) 设 G 为一个类函数. 则存在唯一的一个类函数 F 满足如下 $\in$-递归定义: 对于任意集合 x,

$$F(x) = G(F \restriction x).$$

证明 考虑如下表达式 $\varphi(x, f)$: x 是一个传递集合, f 是一个函数, $x = \mathrm{dom}(f)$, 并且

$$\forall y\,(y \in x \to f(y) = G(f \restriction y)).$$

我们来证 $\varphi(x, f)$ 是一个泛函定义式: 假设 $\varphi(x, f)$ 和 $\varphi(x, g)$ 都成立. 我们断言 $f = g$. 若其不然, 必有 $a \in x$ 满足 $f(a) \neq g(a)$. 令 $a \in x$ 为具有这一性质的 $\in$-极小元. 也就是说, $f(a) \neq g(a)$, 但是, $\forall b\,(b \in a \to f(b) = g(b))$. 由于 $\varphi(x, f)$ 和 $\varphi(x, g)$ 都成立, 我们有

$$f(a) = G(f \restriction a) = G(g \restriction a) = g(a).$$

矛盾.

同样可得到: 如果 $\varphi(x,f)$ 和 $\varphi(y,g)$ 成立, 那么对于 $a\in x\cap y$, 必有 $f(a)=g(a)$.

现在证明: 如果 x 是一个传递集合, 那么必存在一个函数 f 来保证 $\varphi(x,f)$ 成立.

假设不然. 令 M 为一个传递集合但不存在一个函数 f 来保证 $\varphi(M,f)$ 成立.

考虑 $A=\{f\mid \exists x\ (x\subseteq M\wedge\varphi(x,f))\}$. 由映像存在原理, 这是一个集合. 由前面的讨论, A 是一个和谐的函数系统. 令 $H=\bigcup A$, 那么 H 是一个函数, 而且 $\mathrm{dom}(H)\subseteq M$ 是一个传递集合. 进一步地, H 还满足

$$\forall a\ (a\in\mathrm{dom}(H)\to H(a)=G(H\restriction a)).$$

我们来证 $\mathrm{dom}(H)=M$. 假设不然, $M-\mathrm{dom}(H)\neq\varnothing$. 令 $x\in M-\mathrm{dom}(H)$ 为一个 $\in$-极小元. 于是, $x\subseteq\mathrm{dom}(H)$. 从而, $\mathcal{TC}(x)\subseteq\mathrm{dom}(H)$. 注意到

$$\mathcal{TC}(\{x\})=\{x\}\cup\mathcal{TC}(x)$$

是一个传递集合而且

$$x\in\mathcal{TC}(\{x\})\subseteq M.$$

现在定义

$$f=H\restriction\mathcal{TC}(x)\cup\{\langle x,G(H\restriction x)\rangle\}.$$

于是, $f\in A$, 从而 $x\in\mathrm{dom}(H)$. 矛盾.

现在定义所要的类函数 F 如下: 对于所有的 x 和 y,

$$F(x)=y\leftrightarrow\exists a\,\exists f\ (x\in a\wedge\varphi(a,f)\wedge y=f(x)).$$

验证此 F 就是我们所要的类函数的工作留作练习. □

在序数理论中, 我们知道任何一个序数的集合都一定同构与唯一的一个序数. 究其根本原因, 我们发现在任意一个非空的序数集合 X 里, 如果 α 和 β 是 X 中的两个元素, 那么一定有

$$\alpha\neq\beta\leftrightarrow\alpha\cap X\neq\beta\cap X,$$

于是, 我们能够递归地定义

$$\mathrm{ot}(\alpha\cap X)=\{\mathrm{ot}(\beta\cap X)\mid\beta\in\alpha\cap X\}.$$

将这一性质抽象起来, 得到集合的下述自同一概念.

定义 1.99 对于一个非空集合 A 而言, 我们称 A 为一个**自同一**[24]集合, 或者说 A **具有自同一性**, 或者说结构 $(A,\in)$ **满足同一律**(也说结构 $(A,\in)$ 是公理 1 的一个模型) 当且仅当

$$\forall x\,\forall y\,((x\in A\wedge y\in A\wedge\forall z(z\in A\to(z\in x\leftrightarrow z\in y)))\to x=y),$$

也就是说, A 是自同一的当且仅当 $\forall x\in A\forall y\in A\,(x\cap A=y\cap A\to x=y)$.

例 1.34 (1) 每一个传递集合都是自同一的集合.

(2) 每一个序数的集合都具有自同一性.

(3) 令 $A=\{\omega,(V_\omega\cup\{\omega\})\}$. 那么, A 是一个自同一集合; 它既非传递集合, 也非序数的集合.

(4) 令 $A=\{2,3,\{2\}\}$. 那么, A 就不具有自同一性: $3\cap A=\{2\}\cap A=\{2\}$, 但是, $3\neq\{2\}$.

定理 1.97 (传递化定理) 如果一个非空集合 A 上是自同一的, 那么必定存在唯一的 π 和唯一的传递集合 M 满足如下要求:

(i) $\pi:(A,\in)\to(M,\in)$ 是一个 $\in$-同构;

(ii) 如果 $B\subseteq A$ 是一个传递子集, 那么 $\pi\restriction B$ 为恒等映射.

我们将称定理所给定的同构映射为 $(A,\in)$ 的**传递化映射**.

证明 我们知道任何一个传递集合上的 $\in$-自同构都是平凡的恒等映射. 我们也知道两个不相同的传递集合一定不会 $\in$-同构. 所以就有了定理所要求的唯一性.

我们现在来看存在性.

对于任意的 $x\in A$, 我们 $\in$-递归地定义

$$\pi(x)=\{\pi(y)\mid y\in x\cap A\}.$$

(如果 $x\in A$, y 是一个函数, 而且 $x\cap A\subseteq\mathrm{dom}(y)$, 那么 $G(x,y)=\{y(z)\mid z\in x\cap A\}$; 否则, $G(x,y)=\varnothing$. 应用 $\in$-递归定义定理, 上述定义是合理的.)

令 $M=\pi[A]$ 为 π 的映像之集. π 自然是从 A 到 M 上的一个满射. M 是传递集合: 令 $a\in M$, 取 $b\in A$ 满足方程 $a=\pi(b)$, 于是 $a=\pi(b)=\pi[b\cap A]\subseteq M$.

我们来看 π 实际上也是一个单射.

如果不然, 考虑 $\{z\in M\mid\exists x\in A\,\exists y\in A\,(z=\pi(x)=\pi(y)\,\wedge\,x\neq y)\}$. 此集合非空. 令 z 为它的 $\in$-极小元. 取 $x,y\in A$ 作为 z 在此集合中的证据. 也就是说, $x\neq y$ 而且 $z=\pi(x)=\pi(y)$. 由于 A 是自同一的, $x\cap A\neq y\cap A$. 由对称性, 我们不妨设 $x\cap A-y\cap A$ 非空. 取 $u\in(x\cap A-y\cap A)$. 令 $a=\pi(u)$. 那么, $a\in z=\pi(x)=\pi(y)$. 由 $\pi(y)$ 的定义, 取 $v\in y\cap A$ 为满足方程 $a=\pi(v)$ 的一个解. 此时, $u\neq v$ 都在 A 中, 而且 $\pi(u)=\pi(v)=a$, 而 $a\in z$. 这与 z 的极小特性不符.

24 extensional.

由定义, 我们见到 π 是从 A 到 M 上的同构映射.

因此, 如果 $B \subseteq A$ 是传递的, $x \in B$, 那么 $x \cap A = x$, 从而

$$\pi(x) = \{\pi(y) \mid y \in x\}.$$

进一步地, $\pi[B] \subseteq M$ 也是一个传递集合：对于 $a \in \pi[B]$, 令 $b \in B$ 满足方程 $a = \pi(b)$. 从而

$$a = \pi(b) = \pi[b] \subseteq \pi[B].$$

于是我们有两个传递集合 B 和 $\pi[B]$ 之间的同构. 这就表明它们是同一个集合, 而且 π 在其上的作用是恒等作用. □

例 1.35 令 $E = \{2n \mid n \in \omega\}$. 那么, E 的传递化像集合就是 ω 而且传递化映射为 $\pi(2n) = n$.

自同一集合 $A = \{\omega, (V_\omega \cup \{\omega\})\}$ 与自同一集合 $B = \{\omega, \{\omega\}\}$ $\in$- 同构, 它们的传递化像集都为 $\{0, 1\}$.

1.10.2 有秩关系

在序数理论中, 我们知道秩序概念是比序数概念更为一般的概念, 并且任意一个秩序都唯一地同构于一个序数. 现在, 我们将自同一集合的概念进一步推广到配置了某种有秩关系的集合之上, 从而更进一步地抽象出传递集合所持有的基本性质. 有秩关系是一种比秩序更为一般一些的但仍然很有用的一类关系. 这种关系不仅包含了秩序, 也包含了一些特殊的偏序关系, 甚至更广泛.

定义 1.100 对于一个非空集合 A 以及它上面的一个二元关系 R 而言, 我们说 R 是 A 上的一个**有秩关系**[25] 当且仅当 A 的任何一个非空子集合 X 都含有一个 R-极小元 a, 即若 $b \in X$, 则 $\neg(bRa)$ (或者 $(b, a) \notin R$).

事实上, $\in$-极小原理恰恰断言集合之间的 $\in$- 关系就是一个有秩关系. 有秩关系也是秩序概念的一般化.

例 1.36 (1) 如果 X 是一个非空集合, $\in_X = \{(a, b) \mid a \in X \wedge b \in X \wedge a \in b\}$, 那么 $\in_X$ 是 X 上的一个有秩关系.

(2) 如果 $(W, <)$ 是一个秩序集合, 那么 $<$ 是 W 上的一个有秩关系.

定义 1.101 设 A 为一个非空集合而且 R 是 A 上的一个二元关系. 我们称一个从 A 到某个序数 α 的函数

$$f : A \to \alpha$$

为一个 R-**秩函数**当且仅当

$$\forall x \, \forall y \, ((x, y) \in R \to f(x) < f(y)).$$

25 well–founded relation.

例 1.37 如果 $(W,<)$ 是一个秩序集合, 那么映射 $W \ni a \mapsto \mathrm{ot}(W[a],<)$ 是 W 上的一个 $<$-秩函数.

定理 1.98 (秩映射定理) 如果 R 是一个非空集合 A 上的有秩关系, 那么必然存在一个序数 α 和一个从 A 到 α 的满足如下公式的 (典型)R-秩函数 $\rho: A \to \alpha$: 如果 $x \in A$, 那么

$$\rho(x) = \sup\{\rho(y)+1 \mid y \in A \wedge (y,x) \in R\}.$$

反之, 设 R 是 A 上的一个二元关系. 如果存在一个 A 上的 R-秩函数, 那么 R 必是一个有秩关系.

证明 设 (A,R) 为一个非空的有秩关系集. 我们来定义 A 的子集的一个超限序列.

考虑如下定义的类函数 G: 如果 x 是一个长度为一个后继序数 $\beta+1$ 的序列而且 $x(\beta) \subseteq A$, 那么令

$$G(x) = \{a \in A \mid \forall b\,((b,a) \in R \to b \in x(\beta))\};$$

如果 x 是一个长度为一个非零极限序数的序列而且

$$\forall \beta\,(\beta \in \mathrm{dom}(x) \to x(\beta) \subseteq A),$$

那么令 $G(x) = \bigcup \mathrm{rng}(x)$; 否则的话, 令 $G(x) = \varnothing$. 特别地, $G(\langle\ \rangle) = \varnothing$. 由递归定义定理, 我们得到唯一的满足如下递归定义要求的类序列 F: 对于任意一个序数 α, 都有

$$F(\alpha) = G(F \restriction \alpha).$$

断言一 $\forall \alpha\,(\alpha \in \mathrm{Ord} \to F(\alpha) \subseteq F(\alpha+1))$.

首先, $F(0) = \varnothing$;

$F(\alpha+1) = \{a \in A \mid \forall b\,((b,a) \in R \to b \in F(\alpha))\}$;

当 λ 为一个非零极限序数时, $F(\lambda) = \bigcup\{F(\alpha) \mid \alpha < \lambda\}$.

当 $\alpha = 0$, $F(\alpha) \subseteq F(\alpha+1)$;

当 $\alpha = \beta+1$, 设 $x \in F(\alpha) = F(\beta+1)$. 那么 $F(\beta) \subseteq F(\alpha)$, 而且

$$\forall b\,((b,x) \in R \to b \in F(\beta)).$$

于是,

$$\forall b\,((b,x) \in R \to b \in F(\beta) \subseteq F(\alpha)).$$

因此, $x \in F(\alpha+1)$.

当 α 是一个非零极限序数, 设 $x \in F(\alpha)$.

令 $\beta < \alpha$ 满足 $x \in F(\beta)$. 由于 $F(\beta) \subseteq F(\beta+1)$, $x \in F(\beta+1)$. 因此,

$$\forall b \left((b,x) \in R \to b \in F(\beta)\right).$$

从而, $\forall b \left((b,x) \in R \to b \in F(\alpha)\right)$. 由此得到 $x \in F(\alpha+1)$.

断言一因此得到证明.

断言二 $\forall a \left(a \in A \to \exists \alpha \left(a \in F(\alpha)\right)\right)$.

假设此断言不成立. 如下集合一定非空:

$$B = \{a \in A \mid \forall \alpha \left(\alpha \in \mathrm{Ord} \to a \notin F(\alpha)\right)\}.$$

因为 R 是一个有秩关系, 可令 $a \in B$ 为 B 的 R- 极小元. 因此,

$$\forall b \left((b,a) \in R \to \exists \alpha \left(\alpha \in \mathrm{Ord} \wedge b \in F(\alpha)\right)\right).$$

考虑如下的非空集合 C:

$$C = \{b \in A \mid (b,a) \in R\}.$$

对任意一个 $b \in C$, 我们可以取到一个满足 $b \in F(\alpha_b)$ 的最小的 $\alpha_b \in \mathrm{Ord}$. 由映像存在原理,

$$D = \{\alpha_b \mid b \in C\}$$

是一个集合. 令 $\gamma = \bigcup D$. 那么 γ 是一个序数而且

$$\forall b \left((b,a) \in R \to \exists \alpha \left(\alpha \in \gamma+1 \wedge b \in F(\alpha) \subseteq F(\gamma)\right)\right).$$

因此, $a \in F(\gamma+1)$. 矛盾.

由断言二, 对于任何一个 $a \in A$, 我们一定能够取到一个满足 $a \in F(\alpha_a)$ 的最小的序数 α_a. 由映像存在原理, $E = \{\alpha_a \mid a \in A\}$ 是一个集合. 令 $\theta = \bigcup E$. θ 是一个序数而且 $F(\theta+1) = F(\theta) = A$.

对于 $a \in A$, 我们定义 $\rho(a)$ 为满足 $a \in F(\alpha+1)$ 的最小的序数 α.

现在我们假定 $(y,x) \in R$. 那么, $x \in (F(\rho(x)+1) - F(\rho(x)))$, $y \in F(\rho(x))$. 因此, $\rho(y) < \rho(x)$.

我们将对如下公式的验证留作练习: 对于任意的 $x \in A$ 都有

$$\rho(x) = \sup\{\rho(y)+1 \mid (y,x) \in R\}.$$

我们也把定理的第二部分的证明留作练习. □

例 1.38 前面, 我们定义了一个集合的累积层次:

$$V_0 = \varnothing;\ V_{\alpha+1} = \mathfrak{P}(V_\alpha);\ V_\lambda = \bigcup\{V_\alpha \mid \alpha < \lambda\}\ (\lambda\ 为极限序数).$$

我们知道每一个 V_α 都是一个传递集合, 我们又定义了 V^*:

$$V^* = \bigcup\{V_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{Ord}\},$$

从而 V^* 是一个传递类.

对于任意的一个序数 α 而言, $\in$ 都是 V_α 上的一个有秩关系. 实际上, 我们能够一致地在每一个 V_α 上定义一个典型 $\in$-秩函数, 从而达到 V^* 上的典型 $\in$-秩函数. 因此, 任何一个传递集 (从而任何一个集合) 之上都存在一个 $\in$-秩函数.

现在, 我们如下递归地定义 V_α 上的一个 $\in$-秩函数:

$\rho(\mathrm{V}_0) = 0$;

当 $\alpha = \beta + 1$, 假定我们已经对任何一个 $x \in \mathrm{V}_\beta$ 都定义了 $\rho(x)$ 而且满足典型 $\in$-秩函数的要求:

$$\rho(x) = \sup\{\rho(y) + 1 \mid y \in x\}.$$

对于 $x \in \mathrm{V}_\alpha = \mathfrak{P}(\mathrm{V}_\beta)$, 我们定义

$$\rho(x) = \sup\{\rho(y) + 1 \mid y \in x\}.$$

由于 V_β 是传递的, V_α 也是传递的, 从而, 对于 $x \in V_\beta$, $\rho(x)$ 在 V_α 上的定义同 $\rho(x)$ 原来在 V_β 上的定义是完全一致的.

当 λ 为一个非零极限序数, 由我们的归纳假设, 对每一个 $\alpha < \lambda$ 而言, 我们已经在 V_α 上定义了典型 $\in$-秩函数 $\rho \restriction V_\alpha$, 而且这些典型 $\in$-秩函数是彼此和谐的, 即如果 $\beta < \alpha < \lambda$, 那么

$$\rho \restriction \mathrm{V}_\beta \subseteq \rho \restriction \mathrm{V}_\alpha.$$

由映像存在原理, 我们可以将所有这些典型 $\in$-秩函数并起来得到一个 V_λ 上的典型 $\in$-秩函数, 而且仍然对于任何 $x \in \mathrm{V}_\lambda$ 都满足

$$\rho(x) = \sup\{\rho(y) + 1 \mid y \in x\}. \qquad \square$$

正像序数和秩序密不可分一样, 传递集合同有秩关系也有着紧密的联系. 现在我们来证明一类特定有秩关系的表示定理, 也称传递化定理[26]. 这将是秩序表示定理 (定理 1.64) 的加强形式.

定义 1.102 (自同一性) 对于一个非空集合 A 和 A 上的一个有秩关系 E 而言, 我们称 E 为**自同一**当且仅当

$$\forall x\, \forall y\, ((x \in A \wedge y \in A \wedge \forall z(z \in A \to (z\ E\ x \leftrightarrow z\ E\ y))) \to x = y).$$

26 Collapsing Theorem.

一般来说, 我们定义 $\mathrm{ext}_E(x) = \{y \in A \mid (y,x) \in E\}$, 并称 $\mathrm{ext}_E(x)$ 为 x 相对于 E 在 A 中的外延. 自同一的意思就是说 A 的两个不同的元素应当有相对于 E 的不同的外延.

例 1.39 如果 (W,E) 是一个秩序集, 那么 E 是 W 上的一个自同一有秩关系.

证明 设 (W,E) 是一个秩序集. 对于 $x \in W$, $\mathrm{ext}_E(x) = W[x]$. 自然,

$$\forall x, y \in W\, (W[x] = W[y] \leftrightarrow x = y). \qquad \square$$

我们先来证明有秩关系上的递归定义定理.

定理 1.99 设 G 为一个二元类函数. 又设 (A,E) 为一个有秩关系集合. 那么存在唯一的一个定义在 A 上的满足如下递归公式的函数 F: 对于任意一个 $x \in A$,

$$F(x) = G(x, F \restriction \mathrm{ext}_E(x)).$$

证明 留作练习 (参考前面 $\in$-递归定义定理的证明). $\square$

定理 1.100 (传递化定理) 设 A 为一个非空集合, 并且 E 是 A 上的一个自同一有秩关系, 那么必有从结构 (A,E) 到一个传递集合 $(M,\in)$ 上的同构映射 $\pi : (A,E) \to (M,\in)$:

$$\forall x\, \forall y\, (x \in A \wedge y \in A \to ((x,y) \in E \leftrightarrow \pi(x) \in \pi(y))),$$

并且只有唯一的一个这样的传递集合以及只有唯一的一个这样的同构映射.

我们将称定理所给定的同构映射为 (A,E) 的**传递化映射**或者**雪崩映射**. 注意当 (A,E) 是秩序时, 与它同构的传递集合就是一个序数. 这便是秩序表示定理 (定理 1.64) 的内容.

证明 应用上面的有秩关系上的递归定义定理. 考虑如下的二元类函数 G: 如果 $x \in A$ 而且 y 是一个函数, 并且 $\mathrm{ext}_E(x) \subseteq \mathrm{dom}(y)$, 那么令

$$G(x,y) = \{y(z) \mid z \in \mathrm{ext}_E(x)\};$$

否则的话, 令 $G(x,y) = \varnothing$. 于是, 我们得到 π 的递归定义如下: 对于任意一个 $x \in A$,

$$\pi(x) = \{\pi(z) \mid z \in \mathrm{ext}_E(x)\}.$$

令 $M = \pi[A] = \{\pi(x) \mid x \in A\}$. 那么, M 是一个传递集合.

断言 π 是一个单射.

若其不然, $\{z \in M \mid \exists x\ \exists y\ (x \neq y \wedge z = \pi(x) = \pi(y))\}$ 是一个非空集合. 令 z 为这一集合的 $\in$-极小元素. 取 $x, y \in A$ 满足方程 $z = \pi(x) = \pi(y)$ 和不等式 $x \neq y$. 由于 E 是自同一的, $\mathrm{ext}_E(x) \neq \mathrm{ext}_E(y)$. 由对称性, 我们可取一个

$u \in \mathrm{ext}_E(x) - \mathrm{ext}_E(y)$. 令 $a = \pi(u)$. 于是, $a \in z = \pi(x) = \pi(y)$. 取 $v \in \mathrm{ext}_E(y)$ 满足方程 $a = \pi(v)$. 这样得到 A 中的一对 $u \neq v$ 而满足等式 $\pi(u) = \pi(v)$. 这与 z 的 $\in$-极小性相矛盾, 因为 $a \in z$.

所要的唯一性由关于传递集合的同构定理立即可得. □

1.11 练　　习

练习 1.1 证明如下命题成立:

(1) $\forall x(x = x)$.

(2) $\forall x \forall y(x = y \to y = x)$.

(3) $\forall x \forall y \forall z([(x = y) \wedge (y = z)] \to (x = z))$.

(4) $\forall x \forall y \forall z([(x = y) \wedge (y \in z)] \to (x \in z))$.

(5) $\forall x \forall y \forall z([(x = y) \wedge (z \in y)] \to (z \in x))$.

练习 1.2 (1) 假设 $\forall x \exists y(\forall z(z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge z \notin z))$. 证明没有一个集合能够以所有集合都为它的元素, 即不存在包含所有集合的集合.

(2) 证明任给一个集合 x, 都必然存在一个不是 x 的元素的集合 y.

练习 1.3 (1) 证明若 A 非空, 则 $\bigcap A$ 存在.

(2) 如果用同样的表达式来定义 $\bigcap \varnothing$, 你会得到什么?

(3) $\bigcap\{A, B\}$ 是什么集合?

练习 1.4 $\forall x\ (\varnothing \subseteq x)$.

练习 1.5 记号 $\bigcup x$ 没有二义性.

练习 1.6 证明 $\forall z\ ((z \in (x \cup y)) \leftrightarrow (z \in x\ \vee\ z \in y))$.

练习 1.7 证明:

(1) $\forall x \forall y \exists z(\forall u((u \in z) \leftrightarrow [(u \in x \wedge u \notin y) \vee (u \in y \wedge u \notin x)]))$.

(2) $\forall x \neg(\mathfrak{P}(x) \subseteq x)$.

练习 1.8 证明 (1) $\forall z\ ((z \in (x \cap y)) \leftrightarrow (z \in x\ \wedge\ z \in y))$.

(2) $x \cup y = y \cup x$, $x \cap y = y \cap x$.

(3) $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$, $(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$.

(4) $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$, $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$.

(5) $x - (y \cap z) = (x - y) \cup (x - z)$, $x - (y \cup z) = (x - y) \cap (x - z)$.

(6) $x \subseteq y \leftrightarrow x \cup y = y \leftrightarrow x \cap y = x$.

练习 1.9 证明: 定义 1.15 中所断言的集合的确已经由集合论已有的公理保证存在.

练习 1.10 证明: $\forall A\, \forall B\, \exists X\ (X = B^A)$.

练习 1.11 证明: 定义 1.18 中的集合在我们现有的集合论公理体系下存在.

练习 1.12　证明: 如果 f 是一个单射, 那么 f^{-1} 是一个函数.

练习 1.13　证明: 函数之间的复合运算 $\circ$ 满足结合律: $f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$.

练习 1.14　证明: 如果 f 是一个双射, 那么 $f\circ f^{-1}$ 是 f 的值域上的恒等函数; $f^{-1}\circ f$ 则是 f 的定义域上的恒等函数.

练习 1.15　设 f 为一个函数. 证明:

(1) $f^{-1}[A\cap B]=f^{-1}[A]\cap f^{-1}[B]$;

(2) $f^{-1}[A-B]=f^{-1}[A]-f^{-1}[B]$.

练习 1.16　设 $f:A\to B$. 令

$$E_f=\{(x,y)\in A\times A\mid f(x)=f(y)\}.$$

证明: E_f 是 A 上的一个等价关系. 在什么条件下, E_f 与 A 上的等同关系一致?

练习 1.17　设 A 为一个非空集合. 令 G 为全体从 A 到 A 上的双射 (bijection) 所组成的集合. 令 e 为 A 上的恒等映射 (即对所有的 $x\in A$ 都有 $e(x)=x$). 证明: $\langle G,\circ,e\rangle$ 是一个 (非交换) 群. 当 $A=\omega$ 时, 这一变换群通常被记成 S_∞.

练习 1.18　证明如果两个函数具有相同的定义域, 而且在每一处有定义的地方都有相同的值, 那么这两个函数相等.

练习 1.19　用集合论的语言将上述概念写成集合论的表达式: x 是一个有序对; x 是一个关系; x 是 A 和 B 的笛卡尔乘积; x 是一个函数; d 是函数 f 的定义域; f 是从 A 到 B 的单射 (满射、双射).

练习 1.20　证明: 对于任意的集合 X, 都有 $|\mathfrak{P}(X)|=|\{\varnothing,\{\varnothing\}\}^X|$.

练习 1.21　证明如下命题:

(1) $|A|=|A|$.

(2) 如果 $|A|=|B|$, 那么 $|B|=|A|$.

(3) 如果 $|A|=|B|$ 和 $|B|=|C|$, 那么 $|A|=|C|$.

练习 1.22　证明如下:

(1) $|A|\leqslant|A|$.

(2) 如果 $|A|\leqslant|B|$ 和 $|A|=|C|$, 那么 $|C|\leqslant|B|$.

(3) 如果 $|A|\leqslant|B|$ 和 $|B|=|C|$, 那么 $|A|\leqslant|C|$.

(4) 如果 $|A|\leqslant|B|$ 以及 $|B|\leqslant|C|$, 那么 $|A|\leqslant|C|$.

练习 1.23　(1) 如果 x 是传递集合, 那么 $x\cup\{x\}$ 和 $\mathfrak{P}(x)$ 也都是传递集合.

(2) 如果 x 是传递集合, 那么 $(\bigcup x)\subseteq x$.

练习 1.24　如果 $A\subseteq\omega$, 而且 $a\in A$, 那么,

$$a\cap A=\varnothing\iff\forall x\in A\ (a=x\vee a\in x).$$

我们来看看下面的练习如何给出另外一种自然数集合的定义. 为此, 我们需要考虑如下五个恰好带有一个自由变元的表达式：

(1) $\phi_0(x)\equiv\forall y(y\in x\to y\subseteq x)$.

"x 是一传递集合."

(2) $\phi_1(x)\equiv\forall y\,\forall z\,((y\in x\wedge z\in x)\to(y\in z\vee z\in y\vee y=z))$.

"x 具有 $\in$-可比较特性."

(3) $\phi_2(x)\equiv\forall y\,((\varnothing\neq y\subseteq x)\to\exists z\,(z\in y\wedge z\cap y=\varnothing))$.

"x 的任何一个非空子集合都有一个 $\in$-极小元素."

(4) $\phi_3(x)\equiv x=\varnothing\vee\exists a\,(a\in x\wedge x=a\cup\{a\})$.

(5) $\phi_4(x)\equiv\forall z\,(z\in x\to(\phi_0(z)\wedge\phi_1(z)\wedge\phi_2(z)\wedge\phi_3(z)))$.

另外, 再考虑下面这一带两个自由变元的表达式：

(6) $\phi_5(x,a)\equiv x\subseteq a$.

设 u 为一个验证无穷公理的集合. 则依合成原理

$$W_0(u)=\{x\in u\,|\phi_0(x)\wedge\phi_1(x)\wedge\phi_2(x)\wedge\phi_3(x)\wedge\phi_4(x)\wedge\phi_5(x,u)\}$$

是一个集合.

练习 1.25 证明如下结论:

(1) 如果 u 是一个验证无穷公理的集合, 那么, $\varnothing\in W_0(u)$, 而且对所有的 $x\in W_0(u)$, 都有 $x\cup\{x\}\in W_0(u)$.

(2) 如果 u 是一个验证无穷公理的集合, 那么,

$$\begin{aligned}&\phi_0(W_0(u))\,\wedge\,\phi_1(W_0(u))\wedge\\&\phi_2(W_0(u))\,\wedge\,\phi_4(W_0(u))\wedge\\&\phi_5(W_0(u),u)\,\wedge\,\neg(\phi_3(W_0(u))).\end{aligned}$$

(3) 如果 u 和 v 都是验证无穷公理所的集合, 那么 $W_0(u)=W_0(v)$.

(4) 存在唯一的一个集合 W 满足如下要求: 只要 u 是验证无穷公理的集合, 那么 $W=W_0(u)$.

练习 1.26 证明: ω 是同时满足如下四项条件的唯一的集合 A:

(1) $\phi_0(A)$;

(2) $\phi_2(A)$;

(3) $\forall a\,(a\in A\to\phi_3(a))$;

(4) $\varnothing\in A\wedge\forall a\,(a\in A\to a\cup\{a\}\in A)$.

(提示: 从定理已知 ω 是满足这四项条件的一个集合, 只需证唯一性. 设 W 为另一个满足这四项条件的集合. 证 $\omega\subseteq W$ 和 $W\subseteq\omega$.)

练习 1.27 (1) 证明: 若 $A \subseteq \omega$, 而且满足如下性质:

$$\varnothing \in A \wedge \forall x\,(x \in A \to x \cup \{x\} \in A),$$

则 $A = \omega$.

(2) 证明如下数学归纳法原理: 设 $p(x)$ 为一个性质. 用 $0 = \varnothing$, 又用 $n+1 = n \cup \{n\}$. 假设 $p(0)$ 成立, 又假设对任意的 $n \in \omega$ 我们可以从条件 $p(n)$ 推出 $p(n+1)$. 那么, 我们必有对任意的 $n \in \omega$ 总有 $p(n)$ 成立.

(3) 从上面练习中关于 ω 的四条特征性质出发, 你能推出 $\phi_1(\omega)$ 和 $\phi_4(\omega)$ 来吗?

练习 1.28 证明: 例 1.30 中所给出的 $A^{<\omega}$ 是一个集合.

练习 1.29 证明: $[A]^{<\omega} = \bigcup\{[A]^n \mid n \in \omega\}$.

练习 1.30 证明下述命题:

(1) 定义 1.33 所给出的 $\omega \times \omega$ 上的关系是 $\omega \times \omega$ 上的一个线性序.

(2) 对于 $(m,n) \in \omega \times \omega$, 集合

$$\{(a,b) \in \omega \times \omega \mid (a,b) < (m,n)\}$$

是一个有限集合.

(3) 对于 $(m,n) \in \omega \times \omega$, 令 $g(m,n) = k$ 当且仅当

$$|k| = |\{(a,b) \in \omega \times \omega \mid (a,b) < (m,n)\}|.$$

那么, $g : \omega \times \omega \to \omega$ 是一个双射; 试求出 g 的显式算术计算公式.

练习 1.31 证明: 一个集合 X 包含有一个可数无限子集合当且仅当 X 包含一个与它等势的真子集合.

练习 1.32 证明: 两个函数 f 和 g 是彼此和谐的当且仅当 $f \cup g$ 是一个函数.

练习 1.33 设 F 为一个和谐的函数系统. 令 $H = \bigcup F$. 证明:

(1) H 是一个函数;

(2) $\mathrm{dom}(H) = \bigcup\{\mathrm{dom}(f) \mid f \in F\}$;

(3) $\forall f\,(f \in F \to f \subseteq H)$.

练习 1.34 (1) 证明: 推论 1.3.

(2) 我们断言存在唯一的长度为 ω 的满足如下两个递归定义等式的序列 f:

$$f(0) = \omega,$$
$$f(n+1) = f(n) \cup \{f(n)\}, \quad n \in \omega.$$

这个断言是否可以由第一递归定义定理保证成立?

练习 1.35 设 $(A, \prec)$ 是一个线性序, 而且满足下述三条要求:

(1) A 中无 $\prec$- 最大元, 即若 $a \in A$, 那么 A 中必有一个 $\prec$ 大于 a 的元素;

(2) 若 $X \subseteq A$ 非空, 那么 X 必有一个 $\prec$-最小元素;

(3) 若 $X \subseteq A$ 非空, 而且 X 有 $\prec$ 上界, 那么 X 必有一个 $\prec$-最大元素.

证明: $(A, \prec)$ 一定与 $(\mathbb{N}, <)$ 同构, 即一定存在一个从 A 到 $\mathbb{N}$ 的双射 h, 并且 h 满足如下要求:

$$\forall a\,\forall b\,(a \prec b \iff h(a) < h(b)).$$

练习 1.36 对于任意两个有限序列 $s, t \in \omega^{<\omega}$, 我们定义

$$s < t \leftrightarrow \mathrm{dom}(s) < \mathrm{dom}(t) \wedge \forall i\,(i \in \mathrm{dom}(s) \to s(i) = t(i)).$$

证明: $(\omega^{<\omega}, <)$ 是一个偏序集.

练习 1.37 证明: $(\mathfrak{P}(\omega), <)$ 是一个偏序集, 其中

$$x < y \leftrightarrow x \subseteq y \wedge x \neq y.$$

练习 1.38 称 $x \in \mathfrak{P}(\omega)$ 为一个有限子集或者有界子集当且仅当 x 是某一个自然数的子集, 即 $\exists m\,(m \in \omega \wedge x \subseteq m)$. 称 $x \in \mathfrak{P}(\omega)$ 为一个无限子集当且仅当 x 是无界的, 即

$$\forall n\,(n \in \omega \to \exists m\,(m \in x \wedge n < m)).$$

令

$$[\omega]^{<\omega} = \{x \in \mathfrak{P}(\omega) \mid \exists m\,(m \in \omega \wedge x \subseteq m)\},$$

又令

$$[\omega]^{\omega} = \{x \in \mathfrak{P} \mid \forall n\,(n \in \omega \to \exists m\,(m \in x \wedge n < m))\}.$$

(1) 证明: $\forall x\,\forall y\,((x \in [\omega]^{<\omega} \wedge y \in [\omega]^{<\omega}) \to x \cup y \in [\omega]^{<\omega})$.

(2) 证明: $\forall x\,\forall y\,((x \in [\omega]^{<\omega} \wedge y \subseteq x) \to y \in [\omega]^{<\omega})$.

(3) 证明: $([\omega]^{<\omega}, <)$ 是一个偏序集, 其中

$$x < y \leftrightarrow x \subseteq y \wedge x \neq y.$$

(4) 证明: 任何一个非空的 $x \in [\omega]^{<\omega}$ 都有一个最大元, 即同时满足要求 $m \in x$ 和 $\forall n \in x (n \leqslant m)$ 的一个解.

(5) 对于任意的 $x, y \in [\omega]^{\omega}$, 定义

$$x =^* y \leftrightarrow x \triangle y \in [\omega]^{<\omega},$$

以及

$$x \leqslant^* y \leftrightarrow \exists m\,(m \in \omega \wedge (x - m) \subseteq y).$$

证明: $=^*$ 是 $[\omega]^\omega$ 上的一个等价关系; $\leqslant^*$ 是 $[\omega]^\omega$ 上的一个传递关系. 如果我们定义

$$x <^* y \leftrightarrow x \leqslant^* y \wedge x \neq^* y,$$

$<^*$ 是否为 $[\omega]^\omega$ 上的一个偏序关系呢?

练习 1.39 (1) 证明如下的表达式 $\varphi(x,y)$ 是一个函数定义表达式:

$$\varphi(x,y) \leftrightarrow \exists a\, \exists b\, (x = (a,b) \wedge y = a \cup \{b\}).$$

(2) 证明如下的表达式 $\theta(x,y,a)$ 当固定 a 为一个参数时是一个函数定义表达式:

$$\varphi_1(x,y,a) \leftrightarrow \forall z\, (z \in y \leftrightarrow (z = a \vee z \in x \vee \exists a\, \exists b\, \exists c\, (a \in x \wedge b \in x \wedge c = (a,b) \wedge \varphi(c,z)))).$$

练习 1.40 用映像存在原理证明分解原理. [考虑 $\phi(u) \wedge u = v$.]

练习 1.41 证明: $\forall x\, (x \notin x)$.

练习 1.42 证明: 如果 M 是一个非空的传递集合, 那么 $\varnothing \in M$.

练习 1.43 每一个 V_n 都是传递集合; V_ω 也是传递集合.

练习 1.44 (1) 对 $n \in \mathbb{N}$, $n \subseteq V_n \subset V_{n+1}$;

(2) $\mathbb{N} \subset V_\omega$;

(3) $\mathrm{Inf}(V_\omega)$;

(4) 如果 $x \in V_\omega$, 那么 $\mathfrak{P}(x) \in V_\omega$.

练习 1.45 证明:

(1) 如果 $n \in \omega$, $f : n \to V_\omega$, 那么 $f \in V_\omega$.

(2) 如果 $x \in V_\omega$, 那么在 V_ω 中存在 x 的一个线性序, 事实上存在从某个自然数 $n \in \omega$ 到 x 的双射.

练习 1.46 证明: V_ω 是满足下述三条要求的最小的集合 W:

(1) $\varnothing \in W$;

(2) 如果 $v \in W$, 那么 $\{v\} \in W$;

(3) 如果 $v, w \in W$, 那么 $v \cup w \in W$.

练习 1.47 证明: $\forall x\, \exists y\, (x \in y \wedge \forall z\, \forall u\, ((z \in y \wedge u \in y) \to \{\{z,u\}, \bigcup z, \mathfrak{P}(z)\} \subset y))$.

练习 1.48 设 A 是一个非空集合而且它的每一个元素都是一个序数. 又设 $\alpha \in A$, 那么, α 是 A 的 $\in$-极小元当且仅当 α 是 A 的 $\in$-最小元.

练习 1.49 证明: 如果 x 是一个序数的集合而且 x 是传递的, 那么 x 是一个序数.

练习 1.50 (1) 证明: 一个序数 α 是一个极限序数的充分必要条件是 $\alpha = \bigcup \alpha$.

(2) 证明: 如果一个序数 α 是一个非零的极限序数, $\beta \in \alpha$, 那么 $\beta + 1 \in \alpha$.

练习 1.51 设 x 为一个非空集合. 令 $y = \{\alpha \cup \{\alpha\} \mid \alpha \in x\}$. 证明: y 是一个集合.

练习 1.52 设 y 为一个序数的非空集合. 证明如下命题:

(1) $\bigcap y$ 是一个序数, 并且 $\bigcap y$ 是 y 中的 $\in$-最小元.

(2) $\bigcup y$ 是一个序数, 并且下述结论成立:

(a) 如果 $\gamma \in y$, 则 $\gamma \subseteq \bigcup y$;

(b) 如果 $\gamma \in \mathrm{Ord}$, 且 $y \subseteq \gamma$, 那么, $(\bigcup y) \subseteq \gamma$;

(c) 如果 y 中有 $\in$-最大元 $\max(y)$, 即

$$\exists \beta \in y \, \forall \alpha \in y \, (\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta),$$

那么, $\max(y) = \bigcup y$;

(d) 如果 y 没有 $\in$-最大元, 即

$$\forall \alpha \, (\alpha \in y \to \exists \beta \, (\beta \in y \wedge \alpha \in \beta)),$$

那么 $\bigcup y$ 是一个极限序数, $y \subseteq \bigcup y$, $(\bigcup y) \notin y$.

练习 1.53 我们这样来定义 G: 如果 $x \neq \varnothing$ 是一个函数, 那么

$$G(x) = \mathfrak{P}\left(\bigcup \mathrm{rng}(x)\right);$$

如果 x 是其他情形, 那么 $G(x) = \omega$. 证明: G 是一个类函数. 进一步地, 利用这一类函数来证明存在唯一的一个满足如下条件的无穷序列 f (即一个长度为 ω 的序列):

$$f(0) = \omega \wedge \forall n \, (n \in \omega \to f(n+1) = \mathfrak{P}(f(n))).$$

练习 1.54 证明存在唯一的长度为 ω 的满足如下两个递归定义等式的序列 f:

$$f(0) = \omega,$$
$$f(n+1) = f(n) \cup \{f(n)\}, n \in \omega.$$

练习 1.55 证明: 存在一个具备满足如下要求的类序列 F:

(1) $\forall \alpha \in \mathrm{Ord} \, F(\alpha)$ 是一个极限序数;

(2) $\forall \alpha \in \beta \in \mathrm{Ord} \, (F(\alpha) \in F(\beta))$(单调递增);

(3) $\forall \alpha \in \mathrm{Ord} \, (\alpha$ 是极限序数 $\to F(\alpha) = \bigcup\{F(\beta) \mid \beta \in \alpha\})$(连续),

并且, 如果 F 是满足上述三条要求的类序列, 那么, F 必有任意大的不动点, 即

$$\forall \alpha \in \mathrm{Ord} \, \exists \gamma \in \mathrm{Ord} \, (\alpha \in \gamma \wedge F(\gamma) = \gamma).$$

练习 1.56　证明: 满足下述要求的二元类函数 F 是可递归定义的:

(1) $\forall x\, F(x,1)=0$;

(2) $\forall n\in\omega\,\forall x\,(F(x,n+1)=0\leftrightarrow\exists y\exists z\,(x=(y,z)\wedge F(y,n)=0))$.

从而, 可以说 x 是一个 n-元组 $(n\in\omega-\{0\})$ 当且仅当 $F(x,n)=0$.

练习 1.57　验证下述命题:

(1) $(\mathbb{Z},<)$ 不是一个稠密线性序但它没有端点.

(2) $(\mathbb{Q},<)$ 是无端点稠密线性有序集.

练习 1.58　令 $A\in\{\mathbb{N},\mathbb{Z}\}$, 如下定义 A^ω 上的字典序 $\prec$:

(1) 对于 $f,g\in A^\omega$, 当 $f\neq g$ 时, 令 $\delta(f,g)$ 为不等式方程 $f(x)\neq g(x)$ 的最小解.

(2) 对于 $f,g\in A^\omega$,

$$f\prec g\leftrightarrow f\neq g\wedge f(\delta(f,g))<g(\delta(f,g)).$$

证明: 当 $A=\mathbb{Z}$ 时, 上述确定一个无端点稠密线性序; 当 $A=\mathbb{N}$ 时, 上述确定一个带左端点的稠密线性序.

练习 1.59　令

$$E_c=\{f\in\mathbb{Z}^\omega\mid\exists n\,\exists a\,(n\in\omega\wedge a\in\mathbb{Z}\wedge\forall i\,((i\in\omega\wedge n<i)\to f(i)=a))\}.$$

令 $<=\prec\cap(E_c\times E_c)$. 证明: E_c 是一个无穷可数集合, $(E_c,<)$ 是一个无端点的稠密线性有序集.

练习 1.60　令 E_p 为下列两个集合的交:

$$\{f\in\omega^\omega\mid\exists n\in\omega\exists m\in\omega(0<m\wedge\forall i\in(\omega-(n+1))(f(i+m)=f(i)))\},$$

$$\{f\in\omega^\omega\mid\forall j\,\exists k\,(k>j\wedge f(k)\neq f(k+1))\}.$$

令 $<=\prec\cap(E_p\times E_p)$. 证明: E_p 是一个无穷可数集合, $(E_p,<)$ 是一个无端点的稠密线性有序集.

练习 1.61　对于两个自然数的有限序列 $s,t\in\omega^{<\omega}$, 定义 $s<t$ 当且仅当或者

$$\mathrm{dom}(t)<\mathrm{dom}(s)\wedge\forall i\in\mathrm{dom}(t)(t(i)=s(i))$$

或者

$$(\exists k\,(k<\mathrm{dom}(s)\wedge k\leqslant\mathrm{dom}(t)\wedge\forall i\,(i<k\to s(i)=t(i))\wedge(k<\mathrm{dom}(t)\to s(k)<t(k))).$$

证明: $(\omega^{<\omega},<)$ 是一个稠密线性有序集; 它有一个最大元素 $\langle\ \rangle$, 但是无最小元.

练习 1.62　如果 X 和 Y 是序数的两个集合而且存在一个从 X 到 Y 的严格单增函数 $f:X\to Y$, 那么

$$\mathrm{ot}(X)\leqslant\mathrm{ot}(Y).$$

特别地, 如果 $X\subseteq Y$, Y 是序数的一个集合, 那么 $\mathrm{ot}(X)\leqslant\mathrm{ot}(Y)$.

练习 1.63 (1) 如果 C 是序数的一个非空闭集, 那么 C 一定含有一个最大元, 也就是说, $\mathrm{ot}(C)$ 一定是一个后继序数.

(2) 如果 C 是序数的一个非空闭集, $\alpha \in C$, 那么 $\alpha \cap C$ 是 α 的一个闭子集.

练习 1.64 证明: $\mathrm{cf}(\omega) = \omega$.

练习 1.65 设 α 为一个非零极限序数. 证明:

(1) $\mathrm{cf}(\alpha)$ 是一个非零极限序数.

(2) $\mathrm{cf}(\alpha) \leqslant \alpha$.

练习 1.66 验证: 存在非零的序数 α 来实现等式 $\omega + \alpha = \alpha$; 试求出满足此等式的最小的非零序数 α.

练习 1.67 验证: 存在非零的序数 α 来实现等式 $\omega \cdot \alpha = \alpha$; 试求出满足此等式的最小的非零序数 α.

练习 1.68 验证: 一个序数 α 是一个极限序数的充分必要条件是

$$\exists \beta \in \mathrm{Ord}\ (\alpha = \omega \cdot \beta).$$

练习 1.69 设 α 为一个大于或等于 ω 的 (极限) 序数. 令 $[\alpha]^{<\omega}$ 为 α 的有限子集合所组成的集合. 对于任意的 $x, y \in [\alpha]^{<\omega}$, 定义

$$x < y \iff x \neq y \wedge \max(x \triangle y) \in y.$$

证明: $([\alpha]^{<\omega}, <)$ 是一个秩序集.

练习 1.70 证明: 对于任意序数 α, 必有唯一的一对序数 (β, n) 满足如后要求:

(a) β 是一极限序数, $n \in \omega$;

(b) $\alpha = \beta + n$.

练习 1.71 找出满足后述要求的最小序数 α: $\alpha > \omega$, $\forall \beta < \alpha\ (\beta + \alpha = \alpha)$; 试刻画所有满足下述要求的序数 α:

$$\forall \beta < \alpha\ (\beta + \alpha = \alpha).$$

练习 1.72 对下述给定序数 α, 分别找出有理数集合 $\mathbb{Q}$ 的一个子集合 A_α 来实现等式 $(\alpha, \in) \cong (A_\alpha, <)$, 其中 $<$ 是有理数的序:

(a) $\alpha = \omega \cdot (n+2)\ (n \in \omega)$;

(b) $\alpha = \omega^\omega$, $\alpha = \delta_{n+2}\ (n \in \omega)$, 其中 δ_n 是由定义 1.82 所给出的序数序列;

(c) $\alpha = \epsilon_0$.

练习 1.73 设 $\alpha \geqslant \omega$ 是一个可数极限序数. 验证:

$$\exists A \subset \alpha\ (\mathrm{ot}(A) = \omega\ \wedge\ \forall \beta < \alpha\, \exists \gamma \in A\ (\beta \leqslant \gamma)).$$

练习 1.74 证明: 如果 α 是一个可数序数, 那么一定存在有理数集合 $\mathbb{Q}$ 的一个子集合 $X \subset \mathbb{Q}$ 来实现同构式: $(\alpha, <) \cong (X, <)$, 其中 X 上的序 $<$ 是有理数的线性序.

练习 1.75 证明: 如果 $(W, <)$ 是一个可数秩序集合, 那么必有自然数集合 $\mathbb{N}$ 的一个子集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ 以及 X 上的一个秩序 $<_X$ 来实现同构式: $(W, <) \cong (X, <_X)$.

练习 1.76 证明: 如果 $X \subseteq \mathbb{R}$, 并且在实数的线性序 $<$ 下是一个秩序集合 $(X, <)$, 那么, X 一定是一个可数集合.

练习 1.77 验证下列等式或不等式:

(1) $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma}$;

(2) $\left(\alpha^{\beta}\right)^{\gamma} = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$;

(3) 如果 $\alpha \leqslant \beta$, 那么 $\alpha^{\gamma} \leqslant \beta^{\gamma}$;

(4) 如果 $\alpha > 1$, $\beta < \gamma$, 那么 $\alpha^{\beta} < \alpha^{\gamma}$.

练习 1.78 设 α 和 β 是两个序数. 对于 $f : \beta \to \alpha$, 令

$$s(f) = \{\gamma < \beta \mid f(\gamma) \neq 0\},$$

以及令

$$S(\beta, \alpha) = \{f \mid f : \beta \to \alpha\ |s(f)| < \omega\}.$$

对于 $f, g \in S(\beta, \alpha)$, 令

$$f \prec g \text{ 当且仅当 } \exists\gamma < \beta\ (f(\gamma) < g(\gamma)\ \wedge\ \forall\gamma < \xi < \beta\ f(\xi) = g(\xi)).$$

证明: $(S(\beta, \alpha), \prec) \cong (\alpha^{\beta}, <)$.

练习 1.79 设 $X \subseteq \mathbb{N}$ 非空, $\langle (A_i, <_i) \mid i \in X\rangle$ 是以 X 中的自然数为指标的一个线性有序集 $(A_i, <_i)$ 的序列 (比如, $X = \mathbb{N}$, $A_i \subseteq \mathbb{N}$, $<_i = <$), 并且每一个 A_i 至少有两个元素. 令

$$A = \prod_{i \in X} A_i = \left\{ f : X \to \bigcup\{A_i \mid i \in X\} \;\middle|\; \forall i \in X\,(f(i) \in A_i)\right\}.$$

对于 $f, g \in A$, 当 $f \neq g$ 时, 令 $\delta(f, g) = \min(\{i \in X \mid f(i) \neq g(i)\})$, 并且定义

$$f \prec g \leftrightarrow (f \neq g\ \wedge\ f(\delta(f, g)) <_{\delta(f,g)} g(\delta(f, g))).$$

验证: $(A, \prec)$ 是一个线性有序集 (乘积空间 A 上的**字典序**), 但不是一个秩序集. 当 $A_i = \{0, 1\}$ 时, 或者当 $A_i = \mathbb{N}$ 时, 我们便得到康托尔空间 $2^{\mathbb{N}}$, 或者贝尔空间 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 上的线性序.

练习 1.80 设 $(A,<)$ 是一个线性有序集合, A 中至少有两个元素. $A^{<\omega}$ 是 A 上所有有限序列的集合. 对于 $f,g\in A^{<\omega}$, 定义

$$f\prec g\leftrightarrow (f\neq g\wedge(\exists k<\mathrm{dom}(f)\,\forall i<k\,(f(i)=g(i)\wedge (\mathrm{dom}(g)=k\vee f(k)<g(k))))).$$

证明: $(A^{<\omega},\prec)$ 是一个线性有序集合, 但不是一个秩序集. 当 $(A,<)=(\mathbb{N},<)$ 时, $\mathbb{N}^{<\omega}$ 上的这个线性序 $\prec$ 被命名为 $\mathbb{N}^{<\omega}$ 上的**布劳威尔−克林线性序**[27]. 当

$$A=\{0,1\}$$

时, 我们得到全体有限的 0-1- 序列之间的线性序 $(2^{<\omega},\prec)$.

练习 1.81 设 $X\subseteq\mathbb{N}$ 非空, $\langle(A_i,<_i)\mid i\in X\rangle$ 是以 X 中的自然数为指标的一个线性有序集 $(A_i,<_i)$ 的序列, 并且每一个 A_i 至少有两个元素, 它们彼此互不相交. 令

$$A=\bigcup_{i\in X}A_i,$$

以及对于 $a,b\in A$, 令

$$a\prec b\leftrightarrow((\exists i\in X(a,b\in A_i\wedge a<_i b))\vee(\exists i\in X\,\exists j\in X\,(a\in A_i\wedge b\in A_j\wedge i<j))).$$

验证: $(A,\prec)$ 是一个线性有序集, 并且当每一个 $(A_i,<_i)$ 都是秩序时, $(A,\prec)$ 也是一个秩序集.

练习 1.82 如果 $|X|=|Y|$, 那么 X 是可秩序化的当且仅当 Y 是可秩序化的.

练习 1.83 证明: 在 $(\mathrm{Wo}(\omega)/\cong)$ 与 ω_1 之间存在一个双射.

练习 1.84 证明: 若 $\omega\leqslant\alpha<\omega_1$, 那么 $\alpha^+=\omega_1$ 而且在 ω 和 α 之间存在一个双射.

练习 1.85 试图证明如后命题: 如果 $f:\omega\to\omega_1$ 是一个单值映射, 那么 f 的值域 $\mathrm{rng}(f)$ 一定是 ω_1 的某一个元素 $\alpha\in\omega_1$ 的子集合. (当你没有遇到困难时, 想一想你的论证是否合理; 当你遇到困难时, 想一想困难何在, 能否克服.)

练习 1.86 证明: $(\omega\times\omega,<)$, $\omega\times\omega$ 在其典型序之下, 与 $(\omega,<)$ 同构, 而且其上的 Gödel-编码就是一个同构映射. 试给出此同构映射的计算表达式.

练习 1.87 计算 $(\omega+1)\times(\omega+1)$ 上的典型序的长度.

练习 1.88 令

$$\mathfrak{P}_W(\mathbb{Q})=\{X\subset\mathbb{Q}\mid (X,<)\text{ 是一个在有理数之序下的秩序集合}\}.$$

27 Brouwer-Kleene.

(1) 对于 $X \in \mathfrak{P}_W(\mathbb{Q})$, 令 $T(X)$ 为与 $(X,<)$ 同构的序数. 证明: $T:\mathfrak{P}_W(\mathbb{Q}) \to \omega_1$ 是一个满射.

(2) 集合 $\{\{X \in \mathfrak{P}_W(\mathbb{Q}) \mid T(X)=\alpha\} \mid \alpha \in \omega_1\}$ 是 $\mathfrak{P}_W(\mathbb{Q})$ 的一个分划, 即它是 $\mathfrak{P}_W(\mathbb{Q})$ 的一个等价关系的等价类的集合.

练习 1.89　令 $\mathfrak{P}_W(\mathbb{R}) = \{X \subset \mathbb{R} \mid (X,<)$ 是一个在实数之序下的秩序集合 $\}$.

(1) 对于 $X \in \mathfrak{P}_W(\mathbb{R})$, 令 $T(X)$ 为与 $(X,<)$ 同构的序数. 证明: $T:\mathfrak{P}_W(\mathbb{R}) \to \omega_1$ 是一个满射.

(2) 集合 $\{\{X \in \mathfrak{P}_W(\mathbb{R}) \mid T(X)=\alpha\} \mid \alpha \in \omega_1\}$ 是 $\mathfrak{P}_W(\mathbb{R})$ 的一个分划, 即它是 $\mathfrak{P}_W(\mathbb{R})$ 的一个等价关系的等价类的集合.

练习 1.90　设 $\kappa \geqslant \omega$ 是一个正则基数. 证明:

(1) 如果 $X \subset \kappa$, 并且 $|X| < \kappa$, 那么 X 在 κ 中一定有界;

(2) 如果 $\lambda < \kappa$, $f:\lambda \to \kappa$, 那么 $f[\lambda]$ 一定在 κ 中有界.

练习 1.91　证明下述命题:

(1) 如果 n 是一个正整数, α 是一个序数, 那么 $|[\aleph_\alpha]^n| = \aleph_\alpha$.

(2) 如果 α 是一个序数, 那么 $|[\aleph_\alpha]^{<\omega}| = \aleph_\alpha$.

练习 1.92　设 α 是一个序数. 证明下述命题:

(1) 如果 $X \subset \omega_\alpha$, 并且 $|X| < \aleph_\alpha$, 那么 $|\omega_\alpha - X| = \aleph_\alpha$.

(2) 如果 f 是定义在 ω_α 上的一个函数, 那么 $|f[\omega_\alpha]| \leqslant \aleph_\alpha$.

(3) 如果 $\{\alpha,\beta\} \subset \omega_{\alpha+1}$, 那么 $\{\alpha+\beta, \alpha\cdot\beta, \alpha^\beta\} \subset \omega_{\alpha+1}$.

练习 1.93　(1) 如果 $X \in [\omega]^\omega$, 那么 $\pi[X] = \omega$, 其中 π 是 X 的传递化映射.

(2) 如果 α 和 β 是序数, $f:\alpha \to \beta$ 是一个单增函数, 那么 f 就是 $\mathrm{rng}(f)$ 的传递化映射的逆映射.

练习 1.94　设 R 是非空集合 A 上的一个有秩关系. 那么必不存在具有如下特性的无穷序列 $f:\omega \to A$:

$$\forall n\, (n \in \omega \to f(n+1) R f(n)).$$

特别地, 在 $\in$-极小原理之下, 不存在一个 $\in$-单调递减 $(x_{n+1} \in x_n)$ 的无穷序列 $\langle x_n : n < \omega\rangle$.

反之如何?

练习 1.95　证明:

$$\forall x\, \forall \alpha\, (\rho(x) = \alpha \leftrightarrow (x \in \mathrm{V}_{\alpha+1} \wedge \forall \beta\, (\beta < \alpha \to x \notin \mathrm{V}_{\beta+1}))).$$

从而, $\forall x\ \mathrm{RK}(x) = \rho(x)$.

练习 1.96　证明: $\forall \alpha\, (\alpha \in \mathrm{Ord} \to \rho(\alpha) = \alpha)$.

练习 1.97 定义 ω 上的一个二元关系 $\in^*$ 如下:
对于任意的 n, $m \in \omega$, $n \in^* m \iff 2^n$ 在 m 的二进制展开中出现.
(1) 证明: $\in^*$ 是 ω 上的一个自同一的有秩关系.
(2) $(V_\omega, \in)$ 是 $(\omega, \in^*)$ 的传递化映像.

第 2 章　不可数基数

在第 1 章中, 我们的中心点是第一个无穷序数以及它的派生物. 这是我们探讨无穷的起点. 在这一章中, 我们将迈开探索的步伐, 进入不可数集合的领域. 我们的着眼点是第一个不可数基数, 因为这会是继 ω 和 V_ω 之后具有实质代表性的最为具体和典型的对象.

2.1　选 择 公 理

前面, 我们问到过几个问题, 比如, 实数集合是否可秩序化? 任意一个从 ω 到 ω_1 的函数是否在 ω_1 中有界? 是否任意一个无限集合一定含有一个无穷可数子集合? 任意给定两个集合, 我们是否一定可以比较它们势的大小? 这些问题的答案都依赖于选择公理. 在选择公理之下, 它们都有肯定的答案. 在没有选择公理的情形下, 它们的答案可以是否定的. 也就是说, 这些问题相对于集合论的 ZF 公理系统是独立的.

那么, 什么是选择公理呢? 它有些什么样的等价形式呢? 如何应用选择公理来解答前面这些问题以及其他问题呢? 这将是我们这里讨论的内容.

定义 2.1　对于一个给定的非空集合 S, S 上的一个**选择函数** c 是一个从 S 到 $\{\varnothing\}\cup\bigcup S$ 上的满足如下要求的映射:

$$\forall x \in S\ (x \neq \varnothing \to c(x) \in x)$$

以及如果 $\varnothing \in S$ 则 $c(\varnothing)=\varnothing$.

例 2.1　(1) 如果 X 是一个有限集合, 那么 X 上存在一个选择函数.

(2) 如果 X 是一个序数, 那么 X 和 $\mathfrak{P}(X)$ 上存在选择函数.

例 2.2　假设 $f:\omega\to(\omega_1-\omega)$ 是一个单射. 对于每一个自然数 n, 令

$$A_n=\{g \mid g:\omega\to f(n)\ \text{是一个双射}\}.$$

再令 $X=\{A_n \mid n\in\omega\}$, 那么 X 是一个可数无穷集合.

如果 X 上存在一个选择函数, 那么, f 在 ω_1 中有界.

证明　假设 $c:X\to\bigcup X$ 为 X 上的一个选择函数. 取 $\pi:\omega\to\omega\times\omega$ 为一个双射. 令

$$\alpha=\bigcup \mathrm{rng}(f),$$

我们知道 α 是一个序数, 而且 $\text{rng}(f) \subseteq \alpha+1$. 现在我们来证明 α 是一个可数集合. 从而, $\alpha+1<\omega_1$, f 在 ω_1 中有界.

为此, 我们定义从 ω 到 α 上的一个满射. 对于 $n \in \omega$, 定义

$$H(n) = c(A_{(\pi(n))_0})((\pi(n))_1),$$

其中 $\pi(n) = ((\pi(n))_0, (\pi(n))_1)$. H 是一个满射. □

上述例子表明一个给定的可数无穷集合上是否存在选择函数的问题已经不再是一个简单的问题.

定理 2.1 *如果 $\mathcal{TC}(X)$ 是一个可秩序化的集合, 那么 X 上存在一个选择函数.*

证明 假定 $\mathcal{TC}(X)$ 是可秩序化的集合. 设 $<$ 是 $\mathcal{TC}(X)$ 上的一个秩序. 对于任意的 $a \in X$, 我们有 $a \subseteq \mathcal{TC}(X)$, 因此, 如果 $a \neq \varnothing$, 那么, a 有一个 $<$-最小元, 我们就令 $c(a)$ 为这一最小元. 这就定义了 X 上的一个选择函数. □

定理 2.2 *对于一个给定集合 X, X 是可秩序化的当且仅当 $\mathfrak{P}(X)$ 上存在一个选择函数.*

证明 设 $c : \mathfrak{P}(X) \to X$ 为一个选择函数. 我们用超限递归来定义一个从某一序数到 X 上的双射. 为此, 我们先来定义一个类函数 G: $G(\varnothing) = c(X)$, 如果 y 是一个从某一序数到 X 上的一个映射而且 $\text{rng}(y) \neq X$, 那么 $G(y) = c(X - \text{rng}(y))$; 否则, $G(y) = X$. 由超限递归定义定理, 我们有唯一的满足如下递归定义表达式的类序列 F:

$$\forall \alpha \in \text{Ord}\ (F(\alpha) = G(F \restriction \alpha)).$$

第一, 如果 γ 是一个序数而且 $F(\gamma) \in X$, 那么 $F \restriction \gamma : \gamma \to X$. 这由超限归纳法可得.

第二, 如果 $\alpha < \beta$ 是两个序数, 而且 $F(\alpha) \in X$, $F(\beta) \in X$, 那么 $F(\alpha) \neq F(\beta)$. 这是因为 $\alpha \in \text{dom}(F \restriction \beta)$, 以及

$$F(\beta) = G(F \restriction \beta) = c(X - \text{rng}(F \restriction \beta)).$$

第三, $Y = \{b \in X \mid \exists \alpha(b = F(\alpha))\}$ 是 X 的一个子集合. 因此, 由映像存在原理, 方程 $F(\alpha) = X$ 必然有关于 α 的一个解. 令 α 为此方程的最小序数解. 这样,

$$F \restriction \alpha : \alpha \to X$$

是一个单射, 而且 $Y = \text{rng}(F \restriction \alpha)$. 如果 $Y \neq X$, 那么 $F(\alpha) = c(X - Y)$ 是 X 中的一个元素. 这同 $F(\alpha) = X$ 相矛盾. 因此, $Y = X$. □

由此可见, 选择函数的存在性同集合的可秩序化有着紧密的联系, 是不是所有非空集合上都存在一个选择函数呢? 选择公理断言答案是肯定的. 现在我们引进选择公理.

公理 1 (选择公理[1]) (AC): 在任何一个非空集合之上都存在一个选择函数.

公理 2 (可数选择公理[2]) (AC_ω): 在任何一个非空可数集合之上都存在一个选择函数.

公理 3 (相关选择原理[3]) (DC): 如果 R 是非空集合 X 上的一个以 X 为定义域的二元关系, 即 $\forall x \in X\, \exists y \in X\, (x\, R\, y)$, 那么存在一个长度为 ω 的 R **相关序列**: $f : \omega \to X$, $\forall n \in \omega\, (f(n)\, R\, f(n+1))$.

可数选择公理 (AC_ω) 和相关选择原理 (DC) 都是选择公理 (AC) 的推论, 并且都严格弱于选择公理, 但它们通常是数学分析中所应用的选择公理的两种形式.

定理 2.3 如下四个命题等价:

(1) 选择公理.

(2) **秩序化原理**[4]: 每一个集合都可秩序化.

(3) 每一个集合都与某个基数等势.

(4) $\forall X\, \forall Y\, (|X| \leqslant |Y| \vee |Y| \leqslant |X|)$.

证明 (1) $\to$ (2). 给定一个非空集合 X, 由 (1), $\mathfrak{P}(X)$ 上有一个选择函数, 因此, 由此可得到 X 上的一个秩序.

(2) $\to$ (1). 给定一个非空集合 X, 由 (2), $\mathcal{TC}(X)$ 是可秩序化的, 因此, 由此可得到 X 上的一个选择函数.

(4) $\to$ (3). 首先证明: 假设 (4), 那么 $\forall X\, \exists \kappa \in \mathrm{Ord}\, (|X| \leqslant |\kappa|)$.

给定 X, $\mathrm{Wo}(X)$ 是一个集合. 根据映像存在原理, 令

$$\kappa = \sup(\{\alpha \in \mathrm{Ord} \mid \exists R \in \mathrm{Wo}(X)\, \mathrm{ot}(R) = \alpha\}),$$

那么, 必有 $|X| \leqslant |\kappa|^+$; 否则, $|\kappa|^+ < |X|$. 这就意味着 X 有一个子集合 Y 上有一个长度至少为 κ^+ 的秩序, 但这不可能.

因此, 令

$$\gamma = \min(\{\kappa \in \mathrm{Ord} \mid |X| \leqslant |\kappa|\}),$$

那么, $\gamma = |\gamma| = |X|$. □

问题 2.1 有人说: "我可以证明选择公理. 请看我的证明: 给定一个非空集合 X, 对于任意的一个 $a \in X$, 如果 $a = \varnothing$, 那么定义 $c(a) = \varnothing$; 否则, 由 $\in$-极小原理,

1 Axiom of Choice; Zermelo 1904.

2 Axiom of Countable Choice.

3 Principle of Dependent Choices.

4 也称为良序原理; Well–ordering Principle; Zermelo 定理.

a 必然有一个 $\in$-极小元素 $b \in a$ 满足 $b \cap a = \varnothing$, 于是, 我就定义 $c(a) = b$. 这样我就得到 X 上的一个选择函数”.

在你看来, 这位朋友的“证明”有没有什么问题? 如果没有, 人们为什么还要提出个选择公理来? 如果有, 问题出在哪里?

在代数学中人们常用的选择公理的一种形式被称为佐恩引理[5], 这个引理是以一种有关偏序集合的某种存在性的形式所给出.

定义 2.2 (偏序) (1) 非空集合 P 上的一个二元关系 $\leqslant$ 是 P 上的一个**偏序**当且仅当

(a) $\forall x \in P\,(x \leqslant x)$;

(b) $\forall x, y \in P\,((x \leqslant y \wedge y \leqslant x) \to x = y)$;

(c) $\forall x, y, z \in P\,((x \leqslant y \wedge y \leqslant z) \to x \leqslant z)$.

称 $(P, \leqslant)$ 为一个**偏序集**当且仅当 $\leqslant$ 是 P 上的一个偏序.

(2) 如果 $(P, \leqslant)$ 是一个偏序集, 对于 P 中的任意元素 x, y, 定义

$$x < y \leftrightarrow x \leqslant y \wedge x \neq y.$$

也称 $(P, <)$ 为 (严格) 偏序集:

(a) $\forall x \in P\,\neg(x < x)$;

(b) $\forall x, y, z \in P\,((x < y \wedge y < z) \to x < z)$.

(3) 对于偏序集 $(P, \leqslant)$ 而言, $A \subseteq P$ 是 $(P, \leqslant)$ 上的一条**链**当且仅当 $(A, \leqslant)$ 是一个线性有序集合.

(4) 对于偏序集 $(P, \leqslant)$ 而言, $A \subseteq P$ 是 $(P, \leqslant)$ 上的一个**有上界子集**(**有下界子集**) 当且仅当

$$\exists a \in P\ \forall b \in A\ b \leqslant a\ (\exists a \in P\ \forall b \in A\ a \leqslant b);$$

并且称这样的 a 为 A 的一个**上界**(**下界**).

(5) $a \in P$ 是偏序集 $(P, \leqslant)$ 中的一个**极大元**(**极小元**) 当且仅当

$$\{b \in P \mid a \leqslant b\} = \{a\}\ (\{b \in P \mid b \leqslant a\} = \{a\}).$$

定理 2.4 选择公理与下述佐恩引理等价.

佐恩引理: 任意给定一个偏序集合 $(P, \leqslant)$, 如果它的每一条链都有一个 $\leqslant$-上界, 那么, 此偏序集必有一个 $\leqslant$-极大元.

证明 假定秩序原理, 我们来证佐恩引理. 设 $(P, \leqslant)$ 是一个给定的偏序集, 又设 $<^*$ 是集合 P 上的一个秩序.

令 a_0 为 P 在 $<^*$ 下的最小元.

5 Zorn’s Lemma.

假设 a_α 已经定义. 如果 a_α 是一个 $\leqslant$-极大元, 我们则成功地停下来. 如果不然, 那么, 子集合

$$\{b \in P \mid a_\alpha \leqslant b \wedge a_\alpha \neq b\}$$

必不空. 利用秩序 $<^*$, 我们可以从中取出 $<^*$-最小元, 并定义为 $a_{\alpha+1}$.

现在设 λ 为一个极限序数, 而且对于 $\alpha < \lambda$, a_α 已有定义, 并且

$$\{a_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$$

是一条链 $(\alpha < \beta < \lambda \to a_\alpha \leqslant a_\beta)$. 由关于偏序集的假设, 这一条链有一个上界. 利用 $<^*$ 我们可以取到这些上界中 $<^*$-最小元, 并令此元为 a_λ.

由于 $<^*$ 的长度一定小于某一个基数 $\aleph_\gamma$, 上述过程一定在某一个 $\alpha < \aleph_\gamma$ 上成功地停下来. 也就是说, a_α 是一个极大元.

假定佐恩引理, 我们来证秩序原理. 给定一个集合 X, 考虑如下的偏序集合 $(P, \leqslant)$:

$$P = \{f \mid \exists\alpha(f : \alpha \to X \text{是一个单射})\},$$

对于 $f, g \in P$, 定义 $f \leqslant g \iff f \subseteq g$.

现在设 $C \subseteq P$ 是一条链. 即对 $f, g \in C$, 必有或者 $f \leqslant g$ 或者 $g \leqslant f$. 因此, C 是一个函数的和谐系统. 令 $F = \bigcup C$. 那么 $F \in P$ 是 C 的一个上界.

因此, 我们的偏序集满足佐恩引理的条件, 从而, 我们可以得到一个 $\leqslant$-极大元, 记之为 F, 那么 $F : \alpha = \mathrm{dom}(F) \to X$ 是一个从序数 α 到 X 上的一个单射. 利用极大性, 我们来证它是一个满射. 如果不然, $X - \mathrm{rng}(F)$ 必不空. 任取 $a \in X - \mathrm{rng}(F)$, 令 $H \restriction \alpha = F$, 再令 $H(\alpha) = a$, 那么 $H : \alpha + 1 \to X$ 是一个单射. 从而, $H \in P$, 并且 $F \leqslant H$, $F \neq H$. 这与 F 是 P 的 $\leqslant$-极大元相矛盾, 所以, F 必为满射. □

定理 2.5 (接定理 2.3) 下述命题等价:

(1) 选择公理.

(5) 如果 E 是非空集合 X 上的一个等价关系, 那么商空间 X/E 上有一个选择函数.

(6) 如果 I 是一个非空集合, 并且对于每一个 $i \in I$, X_i 是一个非空集合, 那么存在一个满足下述要求的定义在 I 上的函数 f:

$$\forall i \in I\ f(i) \in X_i;$$

即

$$\prod_{i \in I} X_i = \left\{f \;\middle|\; f : I \to \bigcup\{X_i \mid i \in I\} \wedge \forall i \in I\,(f(i) \in X_i)\right\} \neq \varnothing.$$

证明 (5)⇒(6). 给定 $\langle X_i \mid i \in I\rangle$, 令

$$X = \bigcup\{\{i\} \times X_i \mid i \in I\}$$

以及对于 $(i,a),(j,b) \in X$, 令

$$(i,a)E(j,b) \leftrightarrow i = j.$$

那么 E 是 X 上的一个等价关系. 令 f 为商空间 X/E 上的一个选择函数. 对于每一个 $i \in I$, 令

$$g(i) = b \leftrightarrow (i,b) = f(\{i\} \times X_i).$$

那么 $\forall i \in I\, g(i) \in X_i$.

(6)⇒(1). 设 S 是一个非空集合. 不妨设 S 是一个无穷集合. 令 $I = S - \{\varnothing\}$. 对于每一个 $i \in I$, 令 $X_i = i$. 由 (3) 即得 S 上的一个选择函数. □

定义 2.3 (乘积空间) 设 S 为一个非空集合, 而且, S 中的每一个元素都是一个非空集合. 我们定义由 S 的元素所构成的乘积, 记成 $\prod S$, 为 S 上的所有选择函数的全体所组成的集合.

若 I 是一个非空集合, 且对任何一个 $i \in I$, 令 A_i 为一个非空集合, 那么这些 A_i 的乘积就是

$$\prod_{i\in I} A_i = \prod\{A_i \mid i \in I\}.$$

上面的定理表明选择公理等价于后述命题: 若 S 是一个非空集合的非空集合, 那么 $\prod S$ 一定非空.

现在我们来看几个选择公理在集合论中的推论.

定理 2.6 (AC) (1) 设 $B = \{A_i \mid i < \omega\}$ 而且每一个 A_i 都是可数集合. 那么, $\bigcup B$ 是一个可数集合.

(2) 设 $\omega \leqslant \kappa < \aleph_{\alpha+1}$. 如果 $f : \kappa \to \aleph_{\alpha+1}$, 那么, f 在 $\aleph_{\alpha+1}$ 中有界. 所以, 每一个 $\aleph_{\alpha+1}$ 都是一个正则基数.

(3) 如果 X 是一个无限集合, 那么, X 必含有一个可数无穷子集合.

(4) 任给一个集合 A 以及它上面定义的一个函数 f, 我们总有 $|f[A]| \leqslant |A|$.

(5) 如果 $|S| \leqslant \aleph_\alpha$, 以及 $\forall A \in S\, |A| \leqslant \aleph_\alpha$, 那么 $|\bigcup S| \leqslant \aleph_\alpha$.

证明 (2) 对于任意的 $\gamma < \kappa$, 我们都有 $|f(\gamma)| \leqslant \aleph_\alpha$. 不失一般性, 我们假设 $|f(\gamma)| = \aleph_\alpha$ 对于任意的 $\gamma < \kappa$ 都成立. 对 $\gamma < \kappa$, 令 E_γ 为从 $\aleph_\alpha$ 到 $f(\gamma)$ 上的双射的全体所成的集合. 由选择公理, 存在一个选择函数 c 从 E_γ 中为我们选出一个双

射 $c(\gamma)$. 取一个双射 $\pi : \aleph_\alpha \to \kappa \times \aleph_\alpha$. 令

$$B = \bigcup \mathrm{rng}(f).$$

定义 $h : \aleph_\alpha \to B$ 如下：对于任意的 $\beta < \aleph_\alpha$,

$$h(\beta) = c((\pi(\beta))_0)((\pi(\beta))_1).$$

那么, h 是一个满射. 因此, $|B| = \aleph_\alpha$. 由于 B 是一个序数, $B < \aleph_{\alpha+1}$. 所以, f 在 $\aleph_{\alpha+1}$ 中有界.

(3) 令 $\aleph_\alpha$ 为 X 的基数. 令 $\pi : \aleph_\alpha \to X$ 为一个单射. 那么, $\pi[\omega]$ 就是 X 的一个可数无穷子集合.

(5) 在选择公理下, 不妨设

$$S = \{A_\gamma \mid \gamma < \aleph_\alpha\}$$

以及对于每一个 $\gamma < \aleph_\alpha$,

$$A_\gamma = \langle a_\gamma(\beta) \mid \beta < \aleph_\alpha \rangle = \{a_\gamma(\beta) \mid \beta < \aleph_\alpha\}.$$

映射 $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha \ni (\gamma, \beta) \mapsto a_\gamma(\beta) \in \bigcup S$ 是一个满射. 根据 (6) 以及基数平方定理,

$$\left|\bigcup S\right| \leqslant |\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha| = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha. \qquad \square$$

就如同有限序数集 ω 是第一个无穷序数一样, 可数序数集 ω_1 是第一个不可数序数. 在可数选择公理下, 它是一个正则序数, 因而也就是一个不可数正则基数.

由定义, 一个序数 κ 是一个基数当且仅当 $\forall x < \kappa\, |\{y \in \kappa \mid y < x\}| < \kappa$; 同样地, 对于一个秩序集 $(W, <)$ 而言, 如果 $\forall x \in W\, |\{y \in W \mid y < x\}| \leqslant \kappa$, 那么 $|W| \leqslant \kappa^+$. 下面的定理便是这种性质的自然推广. 后面, 我们将应用它来分析连续统函数的行为.

定理 2.7 (AC)　*如果 $(A, \leqslant)$ 是一个线性序, 并且*

$$\forall x \in A\, |\{y \in A \mid y \leqslant x\}| < \aleph_\gamma,$$

那么 $|A| \leqslant \aleph_\gamma$.

证明　设 $f : \mathfrak{P}(A) \to A$ 为 $\mathfrak{P}(A)$ 上的一个选择函数.

递归地定义 $(A, \leqslant)$ 中的一个无界单调递增序列 $\langle a_\xi \mid \xi < \lambda \rangle$：

$$a_0 = f(A) \in A.$$

设 $\beta \in \mathrm{Ord}$ 以及单调递增序列 $\langle a_\xi \mid \xi < \beta \rangle$ 已经被定义好. 如果

$$\{a \in A \mid \forall \alpha < \beta\,(a_\alpha < a)\} \neq \varnothing,$$

那么, 令 $a_\beta = f(\{a \in A \mid \forall \alpha < \beta\,(a_\alpha < a)\})$; 否则, 结束递归定义, 令 $\lambda = \beta$.

首先, $\lambda \leqslant \aleph_\gamma$. 因为如若不然, $a_{\omega_\gamma} \in A$ 必有定义, 从而

$$|\{a \in A \mid a \leqslant a_{\omega_\gamma}\}| \geqslant |\{a_\alpha \mid \alpha < \omega_\gamma\}| = \aleph_\gamma.$$

这与给定条件相矛盾.

其次, 由于

$$A = \bigcup_{\alpha < \lambda} \{a \in A \mid a \leqslant a_\alpha\},$$

以及 $\forall \alpha < \lambda\ |\{a \in A \mid a \leqslant a_\alpha\}| < \aleph_\gamma$, 根据定理 2.6 中的 (5), 我们便得到 $|A| \leqslant \aleph_\gamma$. □

例 2.3 下述例子中, 假设选择公理, 则 (A) 蕴涵 (B), 并且这种 (A) 蕴涵 (B) 都需要选择公理.

(1) 设 $X \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

(A) $\forall \epsilon > 0\, \exists x \in X\, (|x - a| < \epsilon)$;

(B) 存在满足下述要求的序列 $\langle a_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$:

$$(\forall n \in \mathbb{N}\,(a_n \in X)) \wedge (\forall \epsilon > 0\, \exists N\, \forall n > N\, (|a_n - a| < \epsilon)).$$

(2) 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 以及 $a \in \mathbb{R}$.

(A) 如果 $\langle x_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ 是一个收敛于 a 的序列, 那么 $\langle f(x_n) \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ 是一个收敛于 $f(a)$ 的序列;

(B) $\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x\, ((|x - a| < \delta) \to (|f(x) - f(a)| < \epsilon))$.

例 2.4 将实数算术系统 $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, r)_{r \in \mathbb{Q}}$ 看成有理数域上的一个向量空间.

(1) 假设选择公理成立. 那么有理数域上的向量空间 $\mathbb{R}$ 有一组基 B.

(a) 如果 $\{x_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \in [B]^{<\omega}$, $\langle r_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n \rangle \in \mathbb{Q}^{<\omega}$, 那么

$$\left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} r_i \cdot x_i \right) = 0 \to r_1 = \cdots = r_n = 0;$$

(b) 如果 $a \in \mathbb{R}$, 那么存在一个正整数 $n \in \mathbb{N}$ 来见证如下事实:

$$\exists \{x_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \in [B]^n\, \exists \langle r_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n \rangle \in \mathbb{Q}^n \left(a = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} r_i \cdot x_i \right).$$

(2) 假设选择公理成立. 那么存在 $\mathbb{R}$ 上的一个不同于任何倍数函数 (对 $a \in \mathbb{R}$, 映射 $\mathbb{R} \ni x \mapsto a \cdot x$ 被称为 $\mathbb{R}$ 上的倍数函数) 的加法同态映射 (满足等式

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

的实函数被称为 $\mathbb{R}$ 上的加法同态映射).

证明　(1) 称具备 (a) 所表述的性质的实数集合 B 为线性独立子集. 令

$$\mathscr{A} = \{B \subset \mathbb{R} \mid B \text{是一线性独立子集}\}.$$

那么 $\mathscr{A}$ 是一个非空集合, 并且子集合关系 $\subseteq$ 是 $\mathscr{A}$ 上的一个偏序.

如果 $M \subset \mathscr{A}$ 是一条链, 那么 $(\bigcup M) \in \mathscr{A}$. 根据佐恩引理, $\mathscr{A}$ 有一个极大元 B, 此集合 $B \subset \mathbb{R}$ 就是 $\mathbb{R}$ 的一组基.

(2) 假设选择公理成立. 令 $B \subset \mathbb{R}$ 为 $\mathbb{R}$ 的一组基. 固定 $b \in B$. 对于 $x \in \mathbb{R}$, 定义

$$f(x) = \begin{cases} r_i & \text{当 } x = r_1 \cdot x_1 + \cdots + r_i \cdot x_i + \cdots + r_n \cdot x_n \text{ 以及 } x_i = b \text{ 时}, \\ 0 & \text{否则}, \end{cases}$$

其中, 等式 $x = r_1 \cdot x_1 + \cdots + r_i \cdot x_i + \cdots + r_n \cdot x_n$ 隐含着

$$\{x_j \mid 1 \leqslant j \leqslant n\} \in [B]^{<\omega} \wedge \forall 1 \leqslant j \leqslant n\,(r_n \in \mathbb{Q}).$$

那么, f 是 $\mathbb{R}$ 上的一个加法同态映射, 并且不同于任何一个倍数函数. □

事实上, 命题 “每一个向量空间都有一组基” 被证明等价于选择公理.

2.2　基数无穷和与无穷积不等式

现在我们依据选择公理来建立基数的无穷和、无穷积以及基数指数理论. 我们将会看到在选择公理之下, 自然数的算术性质都可以推广到无穷基数之上去.

2.2.1　基数无穷和

引理 2.1　设 $\langle A_i \mid i \in I\rangle$ 和 $\langle A_i' \mid i \in I\rangle$ 分别是两组各自彼此不相交的无穷集合.

(1) 如果对于每一个 $i \in I$, $|A_i| = |A_i'|$, 那么

$$\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| = \left|\bigcup_{i\in I} A_i'\right|.$$

(2) 如果对于每一个 $i \in I$, $|A_i| \leqslant |A_i'|$, 那么

$$\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \leqslant \left|\bigcup_{i\in I} A_i'\right|.$$

注意：当 I 是无穷集合时, 上述引理的证明需要用到选择公理. 事实上, 如果选择公理不成立, 可能会有 (1) 不成立 (甚至每一个 $|A_i| = |A_i'| = 2$) 的情形.

证明　对于每一个 $i \in I$, 选择一个双射 (或者单射)$f_i : A_i \to A_i'$. 由于这些集合彼此不相交,

$$f = \bigcup_{i\in I} f_i : \bigcup_{i\in I} A_i \to \bigcup_{i\in I} A_i'$$

就是所要的一个双射 (或者单射). □

定义 2.4 (基数和)　设 I 是一个非空 (指标) 集合, 且对每一个 $i \in I$, A_i 是一个非空集合, 且其势为 κ_i, 又设若 $i \in I, j \in I$, 必有 $i \neq j \iff A_i \cap A_j = \varnothing$. 我们定义

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = \left|\bigcup_{i\in I} A_i\right|.$$

根据引理 2.1, 基数无穷和独立于用于计算的不相交的集合簇的选择. 事实上, 最简单的计算表达式如下：

引理 2.2　设 $\langle \kappa_i \mid i \in I\rangle$ 为一组带指标的非零基数, 那么

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = \left|\bigcup_{i\in I} \kappa_i \times \{i\}\right|.$$

定理 2.8　设 λ 为一个无穷基数, 又设 $\langle \kappa_\alpha \mid \alpha < \lambda\rangle$ 为一个非零基数序列. 令

$$\kappa = \sup\{\kappa_\alpha \mid \alpha < \lambda\} = \bigcup\{\kappa_\alpha \mid \alpha < \lambda\} = \min\left(\{\gamma \in \mathrm{Ord} \mid \forall \alpha < \lambda\,(\kappa_\alpha \leqslant \gamma)\}\right),$$

那么

$$\sum_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha = \lambda \cdot \kappa = \lambda \cdot \sup\{\kappa_\alpha \mid \alpha < \lambda\}.$$

证明　首先, 因为每一个 $\kappa_\alpha \leqslant \kappa$, 我们得到

$$\sum_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha \leqslant \sum_{\alpha<\lambda} \kappa = \left|\bigcup_{\alpha<\lambda} \kappa \times \{\alpha\}\right| = |\kappa \times \lambda| = |\lambda \times \kappa| = \lambda \cdot \kappa.$$

其次,

$$\lambda = \sum_{\alpha<\lambda} 1 \leqslant \sum_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha;$$

又因为对于每一个 $\beta < \lambda$ 都有 $\kappa_\beta \leqslant \sum_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha$, 再由 κ 的定义, 我们得到

$$\kappa \leqslant \sum_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha.$$

这样, 我们得到

$$\lambda \cdot \kappa = \max\{\lambda, \kappa\} \leqslant \sum_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha.$$

根据序数的可比较性, 我们得到所要的结论. □

例 2.5　(1) $\sum_{i\in\omega} 1 = \sum_{n=1}^{\omega} n = \aleph_0$.

(2) 如果 $\gamma \geqslant \omega$ 是一个极限序数, 那么 $\sum_{i\in\aleph_\gamma} 1 = \sum_{\beta<\gamma} \aleph_\beta = \aleph_\gamma$.

定理 2.9　一个无穷基数 κ 是一个奇异基数 ($\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$) 的充分必要条件是它可以表示成少数个弱小基数之和, 即存在一个满足下述要求

$$\lambda < \kappa \ \wedge\ (\forall\gamma < \lambda\,(\kappa_\gamma < \kappa)) \ \wedge\ \kappa = \sum_{\gamma<\lambda} \kappa_\gamma$$

的基数序列 $\langle \kappa_\gamma \mid \gamma < \lambda \rangle$.

证明　(必要性) 设 κ 是一个奇异基数. 那么, $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$. 令

$$\langle \alpha_\gamma \mid \gamma < \mathrm{cf}(\kappa) \rangle$$

为单调递增收敛于 κ 的序列. 于是,

$$\kappa = \bigcup_{\gamma<\mathrm{cf}(\kappa)} \alpha_\gamma = \bigcup_{\gamma<\mathrm{cf}(\kappa)} \left(\alpha_\gamma - \bigcup_{\nu<\gamma} \alpha_\nu\right).$$

对于每一个 $\gamma < \mathrm{cf}(\kappa)$, 令 $A_\gamma = \left(\alpha_\gamma - \bigcup_{\nu<\gamma} \alpha_\nu\right)$, 以及令 $\kappa_\gamma = |A_\gamma|$, 那么, 对于每一个 $\gamma < \mathrm{cf}(\kappa)$,

$$\kappa_\gamma = |A_\gamma| = \left|\alpha_\gamma - \bigcup_{\nu<\gamma} \alpha_\nu\right| \leqslant |\alpha_\gamma| < \kappa.$$

由于序列 $\langle A_\gamma \mid \gamma < \mathrm{cf}(\kappa) \rangle$ 是一个彼此互不相交的集合之序列,

$$\kappa = \sum_{\gamma<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\gamma.$$

(充分性) 设 $\kappa = \sum\limits_{\gamma<\lambda} \kappa_\gamma$, 其中 $\lambda < \kappa$, 以及 $\kappa_\gamma < \kappa$. 根据定理 2.8,

$$\kappa = \lambda \cdot \left(\sup_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha \right).$$

由于 $\lambda < \kappa$, 上面的等式表明 $\kappa = \sup\limits_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha$. 由此可见基数序列

$$\langle \kappa_\gamma \mid \gamma < \lambda \rangle$$

是一个以 κ 为上确界的序列. 依此序列, 递归地得到一个单调递增收敛于 κ 的子序列, 其长度小于等于 $\lambda < \kappa$. 因此可见 $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$. □

2.2.2 基数无穷乘积

引理 2.3 设 $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ 和 $\langle A'_i \mid i \in I \rangle$ 分别是两组非空集合, 而且

(1) 如果对于每一个 $i \in I$, $|A_i| = |A'_i|$, 那么

$$\left| \prod_{i \in I} A_i \right| = \left| \prod_{i \in I} A'_i \right|;$$

(2) 如果对于每一个 $i \in I$, $|A_i| \leqslant |A'_i|$, 那么

$$\left| \prod_{i \in I} A_i \right| \leqslant \left| \prod_{i \in I} A'_i \right|.$$

引理 2.4 (1) 如果 A 与 C 等势, B 与 D 等势, 那么 $|A^B| = |C^D|$.

(2) 设 κ 和 λ 为两个基数, A 和 B 是任意两个集合, 并且 $|A| = \kappa$, $|B| = \lambda$. 那么 $\kappa^\lambda = |A^B|$.

定义 2.5 (基数积) 设 I 是一个非空集合, 且对每一个 $i \in I$, A_i 是一个非空集合, 且其势为 κ_i. 我们定义

$$\prod_{i \in I} \kappa_i = \left| \prod_{i \in I} A_i \right|.$$

定义 2.6 (基数指数) 设 λ 和 κ 是两个基数. 对每一个 $\alpha < \lambda$, 令 $\kappa_\alpha = \kappa$. 那么,

$$\kappa^\lambda = \prod_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha.$$

注意: $2^\kappa = \prod\limits_{\alpha<\kappa} \kappa_\alpha$, 其中, $\kappa_\alpha = 2$.

引理 2.5　设 $\langle \kappa_i \mid i \in I \rangle$ 为一组带指标的非零基数, 那么

$$\prod_{i \in I} \kappa_i = \left| \prod_{i \in I} \kappa_i \times \{i\} \right|.$$

例 2.6　(1) $\prod_{i=1}^{\omega} 2 = \prod_{n=1}^{\omega} n = \prod_{n=2}^{\omega} n = \prod_{n=1}^{\omega} \aleph_0 = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

(2) $2^{\aleph_0} = |P(\omega)|$.

证明　(2) 令 $x \in P(\omega)$. 如下定义 $f_x : \omega \to 2$: 对于 $n \in \omega$, 当 $n \in x$ 时, 令 $f_x(n) = 1$; 否则, 令 $f_x(n) = 0$. 再令 $h(x) = f_x$, 这样 $h : P(\omega) \to 2^{\omega}$ 是一个双射. □

2.2.3　基数不等式

揭示基数无穷和与无穷积之间的内在关系的是下述柯尼希不等式. 可以说, 这也是集合论基本理论 ZFC 唯一能够证明的基本不等式.

定理 2.10 (柯尼希[6]引理)　设 $\langle \kappa_i, \lambda_i \mid i \in I \rangle$ 为两组基数, 而且, 对于每一个 $i \in I$, 都有 $\kappa_i < \lambda_i$, 那么,

$$\sum_{i \in I} \kappa_i < \prod_{i \in I} \lambda_i.$$

证明　第一步, 我们证明

$$\sum_{i \in I} \kappa_i \leqslant \prod_{i \in I} \lambda_i.$$

对每一个 $i \in I$, 令 $A_i = \kappa_i \times \{i\}$, $B_i = \lambda_i \times \{i\}$. 因为 $\kappa_i < \lambda_i$, 我们有 $A_i \cup \{(\kappa_i, i)\} \subset B_i$. 我们现在来定义一个从 $\bigcup_{i \in I} A_i$ 到 $\prod_{i \in I} B_i$ 中的一个单射 f: 任取 $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, 令 $g(x)$ 为满足表达式 $x \in A_i$ 的唯一指标 $i \in I$. 我们可以定义 $h_x \in \prod_{i \in I} B_i$: $h_x(g(x)) = x$; 对 $i \in I - \{g(x)\}$, 令 $h_x(i) = (\kappa_i, i)$. 然后, 令 $f(x) = h_x$. 可以验证 (留作练习) 这样定义的 f 是一个单射.

第二步, 我们来证明

$$\sum_{i \in I} \kappa_i < \prod_{i \in I} \lambda_i.$$

否则, 我们当有

$$\sum_{i \in I} \kappa_i = \prod_{i \in I} \lambda_i.$$

---

6 König.

令 $A_i = \kappa_i \times \{i\}$, $B_i = \lambda_i \times \{i\}(i \in I)$. 那么,

$$\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| = \left|\prod_{i\in I} B_i\right|.$$

利用它们之间的一个双射, 我们得到一组彼此互不相交的 $X_i \subset \prod_{i\in I} B_i$, 而且 $|X_i| = \kappa_i$, 并且

$$\bigcup_{i\in I} X_i = \prod_{i\in I} B_i.$$

但是, 这不可能. 对于任意一个 $i \in I$, 令

$$A_i = \{h(i) \mid h \in X_i\}.$$

那么, $A_i \subseteq B_i$, 而且 $|A_i| \leqslant |X_i| = \kappa_i < \lambda_i = |B_i|$. 因此, $B_i - A_i \neq \varnothing$. 由选择公理, 可取一个

$$f(i) \in (B_i - A_i).$$

那么, 此 $f \notin \bigcup_{i\in I} X_i$. □

推论 2.1 (1) $2^\kappa > \kappa$.

(2) 若 $\alpha \leqslant \beta$, 那么 $2^{\aleph_\alpha} \leqslant 2^{\aleph_\beta}$.

(3) 若 α 是一个序数, 那么, $\mathrm{cf}(2^{\aleph_\alpha}) > \aleph_\alpha$.

注意: 这三条包含了 ZFC 内能够证明的关于连续统函数 $f(\kappa) = 2^\kappa$ 在无穷基数处的取值的全部基本性质.

证明 (1) $\kappa = \sum_{i<\kappa} 1 < \prod_{i<\kappa} 2 = 2^\kappa$.

(3) 设 $\lambda = \mathrm{cf}(2^{\aleph_\alpha})$. 令 $\langle \kappa_\gamma \mid \gamma < \lambda\rangle$ 是一个单调递增收敛于 $2^{\aleph_\alpha}$ 的基数序列, 即

$$\forall \gamma < \beta < \lambda \left(\kappa_\gamma < \kappa_\beta < 2^{\aleph_\alpha} = \sup\{\kappa_\gamma \mid \gamma < \lambda\}\right).$$

根据柯尼希引理,

$$2^{\aleph_\alpha} = \sum_{\gamma<\lambda} \kappa_\gamma < \prod_{\gamma<\lambda} 2^{\aleph_\alpha} = \left(2^{\aleph_\alpha}\right)^\lambda.$$

如果 $\lambda \leqslant \aleph_\alpha$, 那么

$$2^{\aleph_\alpha} < \left(2^{\aleph_\alpha}\right)^\lambda \leqslant \left(2^{\aleph_\alpha}\right)^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}.$$

因此, $\lambda > \aleph_\alpha$. □

由此可见 $2^{\aleph_0}$ 不会是 $\aleph_\omega$, 因为 $\mathrm{cf}\left(\aleph_\omega\right) = \omega < \mathrm{cf}\left(2^{\aleph_0}\right)$.

定理 2.11 如果 κ 是一个极限基数, $2^{<\kappa} = \sup\left\{2^{|\alpha|} \mid \alpha < \kappa\right\}$, 那么 $2^{\kappa} = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}(\kappa)}$.

证明 设 $\langle \kappa_\alpha \mid \alpha < \mathrm{cf}(\kappa)\rangle$ 为一个单调递增收敛于 κ 的连续序列. 首先我们注意一个等式:

$$2^{\sum_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa_\alpha} = \prod_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} 2^{\kappa_\alpha}.$$

这是因为映射

$$F : 2^{\bigcup_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)}\{\alpha\}\times\kappa_\alpha} \ni f \mapsto \left\langle f\restriction_{\{\alpha\}\times\kappa_\alpha} \,\middle|\, \alpha < \mathrm{cf}(\kappa)\right\rangle \in \prod_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} 2^{\{\alpha\}\times\kappa_\alpha}$$

是一个双射. 这样, 我们就有

$$2^{\kappa} = 2^{\sum_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)}} = \prod_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} 2^{\kappa_\alpha} \leqslant \prod_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} 2^{<\kappa} = \left(2^{<\kappa}\right)^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leqslant \left(2^{\kappa}\right)^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leqslant 2^{\kappa}. \qquad \square$$

引理 2.6 如果 $\alpha \leqslant \beta$, 那么 $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$.

证明 $2^{\aleph_\beta} \leqslant \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leqslant \left(2^{\aleph_\alpha}\right)^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\alpha\cdot\aleph_\beta} = 2^{\max(\{\aleph_\alpha,\aleph_\beta\})} = 2^{\aleph_\beta}$. $\square$

定理 2.12 (豪斯多夫[7]指数递推公式) 对于任意两个序数 α 和 β,

$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}\cdot\aleph_{\alpha+1}.$$

证明 假设 $\beta \geqslant \alpha+1$. 那么, 根据引理 2.6,

$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta},\ \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta},\ \aleph_{\alpha+1} \leqslant \aleph_\beta \leqslant 2^{\aleph_\beta},$$

于是, $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}\cdot\aleph_{\alpha+1}$.

假设 $\beta \leqslant \alpha$. 首先注意到:

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}\cdot\aleph_{\alpha+1} = \max\{\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}, \aleph_{\alpha+1}\} \leqslant \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta}.$$

下面证明: $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} \leqslant \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}\cdot\aleph_{\alpha+1}$.

由于 $\aleph_{\alpha+1}$ 是一个正则基数, 每一个函数 $f : \aleph_\beta \to \aleph_{\alpha+1}$ 都有界. 于是,

$$\omega_{\alpha+1}^{\omega_\beta} = \bigcup_{\gamma<\omega_{\alpha+1}} \gamma^{\omega_\beta}.$$

另外, $\gamma < \omega_{\alpha+1} \to |\gamma| \leqslant \aleph_\alpha$, 以及

$$\left|\bigcup_{\gamma<\omega_{\alpha+1}} \gamma^{\omega_\beta}\right| \leqslant \sum_{2\leqslant\gamma<\omega_{\alpha+1}} |\gamma|^{\omega_\beta}.$$

7 Hausdorff.

因此,

$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} \leqslant \sum_{2\leqslant\gamma<\omega_{\alpha+1}} |\gamma|^{\omega_\beta} \leqslant \sum_{2\leqslant\gamma<\omega_{\alpha+1}} \aleph_\alpha^{\omega_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}\cdot\aleph_{\alpha+1}. \qquad \square$$

应用豪斯多夫公式, 我们可以得到基数指数的计算法则.

首先我们来看一个简单的引理.

引理 2.7 设 κ 是一个极限基数, 并且设 $\lambda \geqslant \mathrm{cf}(\kappa)$ 是一个基数. 那么

$$\kappa^\lambda = \left(\sup\left\{ |\alpha|^\lambda \mid 1<\alpha<\kappa \right\}\right)^{\mathrm{cf}(\kappa)}.$$

证明 令 $\kappa = \sum_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\alpha$, 其中每一个 $\kappa_\alpha < \kappa$. 那么我们有

$$\begin{aligned}\kappa^\lambda &\leqslant \left(\prod_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\alpha\right)^\lambda = \prod_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\alpha^\lambda \\ &\leqslant \prod_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} \sup\left\{|\alpha|^\lambda \mid 1<\alpha<\kappa\right\} = \left(\sup\left\{|\alpha|^\lambda \mid 1<\alpha<\kappa\right\}\right)^{\mathrm{cf}(\kappa)} \\ &\leqslant \left(\kappa^\lambda\right)^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^\lambda. \qquad \square\end{aligned}$$

定理 2.13 设 λ 是一个无穷基数. 那么对于任意的无穷基数 κ. 基数指数 κ^λ 这依照如下关于 κ 的递归方式计算:

(1) 如果 $\kappa \leqslant \lambda$, 那么 $\kappa^\lambda = 2^\lambda$.

(2) 如果存在一个无穷基数 $\mu < \kappa$ 满足 $\mu^\lambda \geqslant \kappa$, 令 mu 为最小的这样的基数, 那么 $\kappa^\lambda = \mu^\lambda$.

(3) 如果 $\kappa > \lambda$ 并且对于每一个严格小于 κ 的无穷基数 μ 都有 $\mu^\lambda < \kappa$, 那么

(a) 若 $\mathrm{cf}(\kappa) > \lambda$, 则 $\kappa^\lambda = \kappa$;

(b) 若 $\mathrm{cf}(\kappa) \leqslant \lambda$, 则 $\kappa^\lambda = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$.

证明 (1) 当 $\kappa \leqslant \lambda$ 时,

$$2^\lambda \leqslant \kappa^\lambda \leqslant (2^\kappa)^\lambda \leqslant \left(2^\lambda\right)^\lambda = 2^\lambda.$$

(2) 设 μ 为最小的满足不等式 $\mu^\lambda \geqslant \kappa$ 的无穷基数 $\mu < \kappa$. 那么

$$\mu^\lambda \leqslant \kappa^\lambda \leqslant \left(\mu^\lambda\right)^\lambda = \mu^\lambda.$$

(3) 当 κ 是一个后继基数时, 用豪斯多夫公式. 设 κ 是一个极限基数. 根据假设,

$$\kappa = \sup\left\{ |\alpha|^\lambda \mid 1<\alpha<\kappa \right\}.$$

如果 $\mathrm{cf}(\kappa) > \lambda$, 那么每一个 $f : \lambda \to \kappa$ 都是有界函数, 从而

$$\kappa^\lambda = \sup\left\{ |\alpha|^\lambda \;\middle|\; 1 < \alpha < \kappa \right\} = \kappa;$$

如果 $\mathrm{cf}(\kappa) \leqslant \lambda$, 根据上面的引理 2.7,

$$\kappa^\lambda = \left(\sup\left\{ |\alpha|^\lambda \;\middle|\; 1 < \alpha < \kappa \right\}\right)^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}.$$ □

定义 2.7　(1) 称一个无穷基数 $\aleph_\alpha$ 为一个**强极限基数**当且仅当

$$\forall \beta < \alpha \left(2^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha\right).$$

(2) 称一个不可数基数 κ 为一个**不可达基数**当且仅当 κ 是一个正则强极限基数.

定理 2.14　对于每一个序数 α, 令 $f(\alpha) = |V_\alpha|$. 那么

(1) $\forall \alpha \in \mathrm{Ord}\,(f(\alpha) < f(\alpha+1))$;

(2) $\forall \alpha < \gamma \in \mathrm{Ord}\,(f(\alpha) < f(\gamma))$;

(3) 如果 $\alpha > 0$ 是一个极限序数, 那么 $f(\alpha) = \sup\{f(\gamma) \mid \gamma < \alpha\}$;

(4) $\forall \alpha \in \mathrm{Ord}\, \exists \gamma \in \mathrm{Ord}\,(\alpha < \gamma = f(\gamma) = |V_\gamma|)$;

(5) 如果 $\alpha \in \mathrm{Ord}$ 以及 $\alpha = f(\alpha)$, 那么 α 是一个强极限基数.

证明　(1) $f(\alpha+1) = |V_{\alpha+1}| = |\mathfrak{P}(V_\alpha)| > |V_\alpha| = f(\alpha)$.

(2) 设 $\alpha < \gamma$. 那么 $\alpha < \alpha + 1 \leqslant \gamma$, 以及 $V_{\alpha+1} \subseteq V_\gamma$. 因此

$$f(\alpha) < f(\alpha+1) \leqslant f(\gamma).$$

(3) 设 $\alpha > 0$ 为一个极限序数. 那么

$$f(\alpha) = |V_\alpha| = \left|\bigcup\{V_\gamma \mid \gamma < \alpha\}\right| = \sup\{f(\gamma) \mid \gamma < \alpha\}.$$

(4) 给定 $\alpha \in \mathrm{Ord}$. 令 $\beta_0 = f(\alpha + \omega + 1)$, 以及 $\forall n \in \omega\ (\beta_{n+1} = f(\beta_n + 1))$. 令 $\gamma = \sup\{\beta_n \mid n \in \omega\}$. 那么

$$f(\gamma) = \sup\{f(\beta_n) \mid n \in \omega\} = \sup\{\beta_n \mid n \in \omega\} = \gamma.$$

(5) 设 $\alpha = f(\alpha)$. 如果 $\alpha = \omega$, ω 是一个强极限基数. 不妨设 $\alpha > \omega$. 设 $\lambda < \alpha$ 是一个无穷基数. 由于

$$\lambda \subset V_\lambda \wedge \lambda \leqslant f(\lambda) < f(\lambda+1) < f(\alpha) = \alpha,$$

以及 $2^\lambda \leqslant f(\lambda+1)$, 得到 $2^\lambda < \alpha$. □

定理 2.15 如果 $\aleph_\alpha$ 是一个强极限基数, 那么 $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_\alpha^{\mathrm{cf}(\alpha)}$, 并且对于任意的两个无穷基数 $\kappa < \aleph_\alpha$, $\lambda < \aleph_\alpha$ 都有 $\kappa^\lambda < \aleph_\alpha$.

证明 $\kappa^\lambda \leqslant (\kappa \cdot \lambda)^{\kappa\cdot\lambda} = 2^{\kappa\cdot\lambda} < \aleph_\alpha$. □

定理 2.16 设 κ 是一个不可达基数. 那么

(1) 如果 $|X| < \kappa$, 那么 $|\mathfrak{P}(X)| < \kappa$;

(2) 如果 $|S| < \kappa$ 且 $\forall X \in S\, |X| < \kappa$, 那么 $|\bigcup S| < \kappa$;

(3) 如果 $|X| < \kappa$ 以及 $f : X \to \kappa$, 那么 $\sup(f[X]) < \kappa$;

(4) $|V_\kappa| = \kappa = \aleph_\kappa$;

(5) 集合 $\{\alpha < \kappa \mid \alpha = |V_\alpha| = \aleph_\alpha\}$ 是 κ 的一个无界闭子集.

证明 (练习). □

广义连续统假设

定义 2.8 (广义连续统假设[8]) 广义连续统假设 (GCH) 是下述命题:

$$\forall\alpha \in \mathrm{Ord}\ \left(2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}\right).$$

所以, 在一般连续统假设 (GCH) 之下, 任何一个极限基数都是一个强极限基数. 但在一般连续统假设不成立时, 强极限基数则有着另外一番含义. 由于一般连续统假设独立于集合论公理系统 ZFC, 下面定理中的假设是一种完全可能的现象, 比如 $\alpha = \omega$.

定理 2.17 设 $\aleph_\alpha$ 是一个奇异基数, 并且

$$\forall\gamma < \alpha\ \left(2^{\aleph_\gamma} = 2^{\aleph_0}\right).$$

那么, $2^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_0}$.

证明 将 $\aleph_\alpha$ 写成少数个弱小基数的和:

$$\aleph_\alpha = \sum_{\gamma<\mathrm{cf}(\alpha)} \kappa_\gamma.$$

那么

$$2^{\aleph_\alpha} = 2^{\sum_{\gamma<\mathrm{cf}(\alpha)}\kappa_\gamma} = \prod_{\gamma<\mathrm{cf}(\alpha)} 2^{\kappa_\gamma} = \prod_{\gamma<\mathrm{cf}(\alpha)} 2^{\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\mathrm{cf}(\alpha)} = 2^{\mathrm{cf}(\alpha)} = 2^{\aleph_0}.$$ □

奇异基数假设

对于一个奇异基数 κ 而言, 一般来讲, 如果 $2^{\mathrm{cf}(\kappa)} \geqslant \kappa$, 那么 $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = 2^{\mathrm{cf}(\kappa)}$; 如果 $2^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa$, 那么 κ^+ 是 $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$ 是最小可能的取值. 奇异基数假设则断言这恰好发生.

8 GCH, Generalized Continuum Hypothesis.

定义 2.9　奇异基数假设是命题: 对于任意一个奇异基数 κ 而言, 如果 $2^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa$, 那么 $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^+$.

自然, 如果一般连续统假设成立, 那么奇异基数假设也成立. 因为, 根据定理 2.11, $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}(\kappa)}$; 根据 GCH, $2^{<\kappa} = \kappa$, 所以

$$\kappa^+ = 2^\kappa = \left(2^{<\kappa}\right)^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}.$$

后面我们会看到, 奇异基数假设是一个比一般连续统假设弱许多的命题.

在奇异基数假设下, 基数指数运算也可以大幅度简化. 下面的定理表明在奇异基数假设下, 基数指数完全由连续统函数在正则基数上的取值所确定.

定理 2.18　假设奇异基数假设 SCH 成立.

(1) 如果 κ 是一个奇异基数, 那么

(a) 当连续统函数在 κ 之下是一个最终为常值函数时, 即

$$\exists\alpha < \kappa\forall\lambda < \kappa \left(\alpha = |\alpha| \wedge \left((\alpha \leqslant \lambda = |\lambda|) \to 2^\lambda = 2^\alpha\right)\right),$$

必有 $2^\kappa = 2^{<\kappa}$;

(b) 当连续统函数在 κ 之下并非最终为常值函数时, 必有 $2^\kappa = (2^{<\kappa})^+$.

(2) 如果 κ 和 λ 都是基数, 那么

(a) 若 $\kappa \leqslant 2^\lambda$, 则 $\kappa^\lambda = 2^\lambda$;

(b) 若 $2^\lambda < \kappa$ 且 $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$, 则 $\kappa^\lambda = \kappa$;

(c) 若 $2^\lambda < \kappa$ 且 $\lambda \geqslant \mathrm{cf}(\kappa)$, 则 $\kappa^\lambda = \kappa^+$.

证明　(1) 设 κ 是一个奇异基数. 根据定理 2.17 和定理 2.11, 2^κ 或者是 $2^{<\kappa}$, 或者是 $(2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}(\kappa)}$. 后者当连续统函数在 κ 之下并非最终为常值函数时发生. 这种情形下, $\mathrm{cf}\left(2^{<\kappa}\right) = \mathrm{cf}(\kappa)$, 并且 $2^{\mathrm{cf}\left(2^{<\kappa}\right)} = 2^{\mathrm{cf}(\kappa)} < 2^{<\kappa}$. 在奇异基数假设下,

$$\left(2^{<\kappa}\right)^{\mathrm{cf}\left(2^{<\kappa}\right)} = \left(2^{<\kappa}\right)^+.$$

(2) 固定 λ. 应用关于 κ 的归纳法. 设 $\kappa > 2^\lambda$. 如果 $\kappa = \nu^+$ 是一个后继基数, 那么根据归纳假设, $\nu^\lambda \leqslant \kappa$. 从而, 由豪斯多夫公式 (定理 2.12),

$$\kappa^\lambda = \left(\nu^+\right)^\lambda = \nu^+ \cdot \nu^\lambda = \kappa.$$

如果 κ 是一个极限基数, 那么对于任何严格小于 κ 的基数 ν 都有 $\nu^\lambda < \kappa$. 根据定理我们有: 若 $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$, 则 $\kappa^\lambda = \kappa$; 若 $\lambda \geqslant \mathrm{cf}(\kappa)$, 则 $\kappa^\lambda = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$, 从而在 $2^\lambda < \kappa$ 的前提之下就有 $2^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leqslant 2^\lambda < \kappa$, 应用奇异基数假设, 得到

$$\kappa^\lambda = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^+.$$

□

相对彻底弱势集合

利用基数概念, 我们可以很自然地将彻底有限集合的概念推广到相对于任意的基数上去. 这就是那些相对于给定无穷基数的彻底弱势的集合. 我们先从彻底可数集合开始.

定义 2.10 称集合 x 为一个**彻底可数集**当且仅当 x 的传递闭包 $\mathcal{TC}(x)$ 是一个可数的集合.

引理 2.8 如果 M 是一个传递集合, $\kappa = |M|$, 那么 $\mathrm{RK}(M) < \kappa^+$.

证明 设 M 为一个传递集合, $<$ 为 M 上的一个序型为 κ 的秩序,

$$\rho : (M \cup \{M\}) \to \mathrm{Ord}$$

为定义在 $M \cup \{M\}$ 上的秩函数：$\rho(\varnothing) = 0$, 对于 $x \in M \cup \{M\}$,

$$\rho(x) = \sup(\{\rho(y) + 1 \mid y \in x\}).$$

由于 $|\rho[M]| \leqslant \kappa$, $\rho(M) = \sup(\{\rho(x) + 1 \mid x \in M\}) < \kappa^+$, 从而,

$$\mathrm{RK}(M) = \rho(M) < \kappa^+ \ . \qquad \square$$

引理 2.9 (1) 如果 x 是一个彻底可数集, 那么 x 的秩必为一个可数序数.

(2) 存在一个具有后述性质的集合 X : $x \in X$ 当且仅当 x 是一个彻底可数集.

证明 (1) 因为 $\mathcal{TC}(x)$ 可数, $\mathrm{RK}(\mathcal{TC}(x)) < \omega_1$, 所以,

$$\mathrm{RK}(x) \leqslant \mathrm{RK}(\mathcal{TC}(x)) + 1 < \omega_1 \ .$$

(2) 令 $X = \{x \in V_{\omega_1} \mid |\mathcal{TC}(x)| < \aleph_1\}$. 那么, X 是一个集合, 并且 $x \in X$ 当且仅当 x 是一个彻底可数集. $\square$

更一般的情形就是相对彻底弱势的集合.

定义 2.11 设 κ 是一个无穷基数. 称集合 X 为一个**彻底弱势于**κ 的集合当且仅当

$$|\mathcal{TC}(\{X\})| < \kappa.$$

令 $\mathscr{H}_\kappa = \{X \mid |\mathcal{TC}(X)| < \kappa\}$.

我们需要验证对于每一个无穷基数 κ 而言, $\mathscr{H}_\kappa$ 都是一个集合.

引理 2.10 对于无穷基数 κ 而言, $\mathscr{H}_\kappa$ 是一个势为 $2^{<\kappa}$ 的集合, 并且 $\mathscr{H}_\kappa \subseteq V_\kappa$; 当 $\kappa > \omega$ 为正则基数时, κ 是不可达基数当且仅当 $V_\kappa = \mathscr{H}_\kappa$.

证明 设 $x \in V$. 令 $\alpha = \mathrm{RK}(x)$. 如果 $\xi < \alpha$, 那么 $\exists z \in \mathcal{TC}(x)(\xi = \mathrm{RK}(z))$, 从而

$$\{\mathrm{RK}(z) \mid z \in \mathcal{TC}(x)\} = \alpha.$$

因此, 如果 $x \in \mathscr{H}_\kappa$, 那么 $\mathrm{RK}(x) < \kappa$. 于是, $\mathscr{H}_\kappa \subseteq V_\kappa$.

一方面, 对于 $\lambda < \kappa$, $\mathfrak{P}(\lambda) \subset \mathscr{H}_\kappa$, 因此, $2^{<\kappa} \leqslant |\mathscr{H}_\kappa|$.

对于 $x \in \mathscr{H}_\kappa$, 令 $\lambda = |\mathcal{TC}(x) \cup \{x\}| < \kappa$. 应用选择公理, 令 $F(x) \subset \lambda \times \lambda$ 来见证

$$(\lambda, F(x)) \cong (\mathcal{TC}(x) \cup \{x\}, \in).$$

映射 $x \mapsto F(x)$ 是一个单射, 并且

$$F : \mathscr{H}_\kappa \to \bigcup \{\mathfrak{P}(\lambda \times \lambda) \mid \lambda < \kappa\}.$$

从而, $|\mathscr{H}_\kappa| \leqslant 2^{<\kappa}$. □

$\mathscr{H}_\omega = V_\omega$ 是全体彻底有限集合之集合; $\mathscr{H}_{\omega_1}$ 是全体彻底可数集合之集合.

2.3　滤子与理想

在这一节里, 我们引进幂集的具有某些特殊性质的子集合: 滤子与理想, 以及超滤子和素理想.

超滤子存在性

定义 2.12 (滤子)　设 X 是一个非空集合, X 的幂集 $\mathfrak{P}(X)$ 的一个子集合 $\mathscr{F}$ 是 X 上的一个**滤子**当且仅当

(1) $X \in \mathscr{F}$ 以及 $\varnothing \notin \mathscr{F}$;

(2) 如果 $A \in \mathscr{F}$ 以及 $B \in \mathscr{F}$, 那么 $A \cap B \in \mathscr{F}$;

(3) 如果 $B \subseteq A \subset X$ 以及 $B \in \mathscr{F}$, 那么 $A \in \mathscr{F}$.

X 上的一个滤子 $\mathscr{F}$ 是 X 上的一个**超滤子**当且仅当

(4) 如果 $A \subset X$, 那么或者 $A \in \mathscr{F}$, 或者 $(X - A) \in \mathscr{F}$.

例 2.7　设 X 是一个无穷集合, $\aleph_0 \leqslant \kappa \leqslant |X|$ 是一个基数. 那么

$$\mathscr{F} = \{A \subseteq X \mid |X - A| < \kappa\}$$

是 X 上的一个滤子.

例 2.8　设 $a \in X$. 那么

$$\mathscr{F}_a = \{A \subseteq X \mid a \in A\}$$

是 X 上的一个超滤子. 称 $\mathscr{F}_a$ 为由 a 所生成的超滤子; 所有这样由一个元素所生成的超滤子被称为 X 上的**平凡超滤子**.

与 (超) 滤子对偶的概念是 (素) 理想.

定义 2.13 (理想) 设 X 是一个非空集合. X 的幂集 $\mathfrak{P}(X)$ 的一个子集合 $\mathscr{I}$ 是 X 上的一个**理想**当且仅当

(1) $X \notin \mathscr{I}$ 以及 $\varnothing \in \mathscr{I}$;

(2) 如果 $A \in \mathscr{F}$ 以及 $B \in \mathscr{I}$, 那么 $A \cup B \in \mathscr{I}$;

(3) 如果 $B \subseteq A \subset X$ 以及 $A \in \mathscr{I}$, 那么 $B \in \mathscr{I}$.

X 上的一个理想 $\mathscr{I}$ 是 X 上的一个**素理想**当且仅当

(4) 如果 $A \subset X$, 那么或者 $A \in \mathscr{I}$, 或者 $(X - A) \in \mathscr{I}$.

定义 2.14 设 X 是一个非空集合, $\mathscr{I}$ 是 X 上的一个理想. X 的一个子集 A 是一个 **$\mathscr{I}$-正测度集**, 当且仅当 $A \notin \mathscr{I}$. 令

$$\mathscr{I}^+ = \{A \subseteq X \mid A \notin \mathscr{I}\},$$

$\mathscr{I}^* = \{A \subseteq X \mid (X - A) \in \mathscr{I}\}$.

如果 $\mathscr{F}$ 是 X 上的一个滤子, 则对于 $A \subseteq X$, 令

$$A \in \mathscr{F}^+ \iff \forall B \in \mathscr{F}\,(A \cap B \neq \varnothing).$$

$\mathscr{F}^* = \{A \subseteq X \mid (X - A) \in \mathscr{F}\}$.

根据定义, X 上的滤子 $\mathscr{F}$ 是一个超滤子当且仅当 $\mathscr{F} = \mathscr{F}^+$; $\mathscr{I}$ 是一个素理想当且仅当 $\mathscr{I}^+ = \mathscr{I}^*$.

例 2.9 设 X 是一个无穷集合, $\omega \leqslant \kappa \leqslant |X|$ 是一个基数. 那么 $[X]^{<\kappa}$ 是 X 上的一个理想, 其正测度子集之全体为

$$\left([X]^{<\kappa}\right)^+ = \{A \subseteq X \mid |A| \geqslant \kappa\}.$$

尤其是, $[\omega]^{<\omega}$ 是 ω 上的一个理想, $[\omega]^\omega = ([\omega]^{<\omega})^+$; $[\omega_1]^{<\omega_1}$ 是 ω_1 上的一个理想, $[\omega_1]^{\omega_1} = ([\omega_1]^{<\omega_1})^+$.

命题 2.1 设 X 是一个非空集合.

(1) 如果 $\mathscr{F}$ 是 X 上的一个 (超) 滤子, 那么

$$\mathscr{I} = \{A \subseteq X \mid (X - A) \in \mathscr{F}\}$$

是 X 上的一个 (素) 理想.

(2) 如果 $\mathscr{I}$ 是 X 上的一个 (素) 理想, 那么

$$\mathscr{F} = \{A \subseteq X \mid (X - A) \in \mathscr{I}\}$$

是 X 上的一个 (超) 滤子.

证明 (练习.) □

由此可见, $\mathscr{I}$ 是 X 上的一个素理想当且仅当 $\mathscr{I}^+$ 是 $\mathscr{I}$ 的对偶滤子. 前面的练习表明有限集合上只有平凡超滤子, 没有非平凡超滤子.

问题 2.2 是否任意一个无穷集合上都有一个非平凡的超滤子呢?

定义 2.15 (有限交性质) 设 X 是一个非空集合. X 的幂集 $\mathfrak{P}(X)$ 的一个子集合 $\mathscr{E}$ 具有**有限交性质**当且仅当

(1) $\varnothing \notin \mathscr{E} \neq \varnothing$;

(2) 如果 $A \in [\mathscr{E}]^{<\omega}$ 非空, 那么 $(\bigcap A) \in \mathscr{E}$.

定理 2.19 (塔尔斯基) 设 X 是一个无穷集合.

(1) 如果 $\mathscr{E}$ 是 $\mathfrak{P}(X)$ 的一个具有有限交性质的子集合, 那么 $\mathscr{E}$ 一定可以扩展成 X 上的一个超滤子 $\mathscr{F}$.

(2) 如果 $\mathscr{J}$ 是 X 上的一个理想, 那么 $\mathscr{J}$ 一定可以扩展成 X 上的一个素理想 $\mathscr{I} \supseteq \mathscr{J}$.

证明 设 $\mathscr{E}$ 是 $\mathfrak{P}(X)$ 的一个具有有限交性质的子集合. 令

$$\mathscr{A} = \{E \subset \mathfrak{P}(X) \mid E \supseteq \mathscr{E} \ \wedge\ E \text{ 具有有限交性质}\}.$$

那么 $\mathscr{A}$ 非空, 并且在子集合关系 $\subseteq$ 之下构成一个偏序集. 如果 $\mathcal{C} \subset \mathscr{A}$ 是一个 $\subseteq$-链, 那么 $\bigcup \mathcal{C}$ 也具有有限交性质, 从而是 $\mathscr{A}$ 中的一个元素. 根据佐恩引理, $\mathscr{A}$ 中必有一个 $\subseteq$-极大元 $\mathscr{F}$.

我们来验证这样的极大元 $\mathscr{F}$ 就是 X 上的一个超滤子.

由于 $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{F}$ 非空, 欲见 $\mathscr{F}$ 是一个滤子, 只需验证滤子定义 (定义 2.12) 中的条件 (3).

设 $A \in \mathscr{F}$ 以及 $A \subset B \subseteq X$. 如果 $B \notin \mathscr{F}$, 那么

$$\mathscr{D} = \mathscr{F} \cup \{Y \subseteq X \mid \exists C \in \mathscr{F}\,(B \cap C \subseteq Y)\}$$

也就具有有限交性质, 并且 $\mathscr{D} \supseteq \mathscr{F} \cup \{B\}$. 这与 $\mathscr{F}$ 的极大性相矛盾. 这样, $\mathscr{F}$ 是一个滤子.

现在验证超滤子定义 (定义 2.12) 中的条件 (4). 设 $A \subset X$ 以及 $A \notin \mathscr{F}$. 由 $\mathscr{F}$ 的极大性, 必有 $B \in \mathscr{F}$ 与 A 不相交. 于是, $B \subseteq (X - A)$. 由于 $\mathscr{F}$ 是一个滤子,

$$(X - A) \in \mathscr{F}. \qquad \square$$

推论 2.2 如果 κ 是一个无穷基数, 那么 κ 上存在一个与理想 $[\kappa]^{<\kappa}$ 不相交的超滤子.

例外尺度

利用一个正则基数上的理想 $\mathscr{I}$, 我们引进模此理想的一种**例外尺度**: 几乎处处.

定义 2.16 设 κ 是一个无穷正则基数. 设 $\mathscr{I}$ 是 κ 上的一个非平凡理想.

(1) 称 κ 的两个子集合 X 和 Y (**模理想**$\mathscr{I}$) **几乎相等**, 记成 $X =^*_{\mathscr{I}} Y$, 当且仅当 $X\triangle Y \in \mathscr{I}$; 称 Y (**模理想**$\mathscr{I}$) **几乎包含** X, 记成 $X \subseteq^*_{\mathscr{I}} Y$, 当且仅当 $(X-Y) \in \mathscr{I}$.

(2) 称 κ 的两个子集合 X 和 Y (**模理想**$\mathscr{I}$)**几乎不相交**, 记成 $X\cap Y =^*_{\mathscr{I}} \varnothing$, 当且仅当 $X \cap Y \in \mathscr{I}$.

(3) 称 κ 的两个序数函数 f 和 g (**模理想**$\mathscr{I}$)**几乎相等**, 记成 $f =^*_{\mathscr{I}} g$, 当且仅当

$$\{\alpha \in \kappa \mid f(\alpha) \neq g(\alpha)\} \in \mathscr{I}.$$

(4) 称 κ 的两个序数函数 f 和 g (**模理想**$\mathscr{I}$)**几乎不相交**, 记成 $f\cap g =^*_{\mathscr{I}} \varnothing$, 当且仅当

$$\{\alpha \in \kappa \mid f(\alpha) = g(\alpha)\} \in \mathscr{I}.$$

(5) 称 κ 的序数函数 f (**模理想**$\mathscr{I}$)**几乎处处小于**序数函数 g, 记成 $f <^*_{\mathscr{I}} g$, 当且仅当

$$\{\alpha \in \kappa \mid g(\alpha) \leqslant f(\alpha)\} \in \mathscr{I}.$$

对我们而言, ω 和 ω_1 是当前关注的重点; 理想 $[\omega]^{<\omega}$, $[\omega_1^{<\omega_1}$ 以及 $\mathrm{NS} = \mathrm{NS}_{\omega_1}$ 便是"几乎处处"尺度的关注点.

例 2.10 设 $\kappa \geqslant \omega_1$ 为一正则基数. 令 $\mathscr{I} = [\kappa]^{<\kappa}$. 令 $\langle C_\alpha \mid \alpha < \kappa^+\rangle$ 为例 2.12 中所定义的 κ 的典型无界闭子集序列. 那么

$$\forall \alpha < \beta < \kappa^+ \ (C_\beta \subset^*_{\mathscr{I}} C_\alpha).$$

定理 2.20 存在一个势为 $2^{\aleph_0}$ 的模理想 $[\omega]^{<\omega}$ 几乎不相交的子集簇 $\mathscr{A} \subset [\omega]^\omega$.

证明 令 $\pi : \omega \to \omega^{<\omega}$ 为一个双射. 对于每一个函数 $f : \omega \to \omega$, 令

$$A_f = \{\pi^{-1}(f\restriction_n) \mid n \in \omega\}.$$

再令

$$\mathscr{A} = \{A_f \mid f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}.$$

那么 $|\mathscr{A}| = 2^{\aleph_0}$, $\mathscr{A}$ 是一个几乎处处不相交集簇.

对于不相等的 $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 令 $n = \min(\{m \in \omega \mid f(m) \neq g(m)\})$. 那么,

$$A_f \cap A_g = \{\pi^{-1}(f\restriction_i) \mid i \leqslant n\}.$$ □

定理 2.21 存在一个长度为 ω_1 的模理想 $\mathscr{I} = [\omega]^{<\omega}$ 几乎处处单调递增的 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 中的序列.

证明　我们递归地定义所要的序列.

$f_0(n) = n\,(n \in \mathbb{N})$.

对于 $\alpha = \beta + 1 < \omega_1$, 假设 f_β 已经被定义好, 并且序列 $\langle f_\gamma \mid \gamma < \alpha\rangle$ 是一个几乎处处单调递增的序列. 那么, 定义

$$f_\alpha(n) = f_\beta(n) + 1\ (n \in \omega).$$

序列 $\langle f_\gamma \mid \gamma \leqslant \alpha\rangle$ 依旧是一个几乎处处单调递增的序列.

现在假设 $\alpha < \omega_1$ 是一个极限序数. 令 $\langle \alpha_n \mid n < \omega\rangle$ 是一个严格单调递增收敛于 α 的序列. 定义

$$f_\alpha(n) = \max(\{f_{\alpha_i}(n) + 1 \mid i \leqslant n\})\ (n \in \omega).$$

那么, $f_\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 并且 $\forall \gamma < \alpha\ (f_\gamma <^*_{\mathscr{I}} f_\alpha)$, 其中, $\mathscr{I} = [\omega]^{<\omega}$. □

定理 2.22　*存在一个长度为 ω_2 的模理想 $\mathscr{I} = [\omega_1]^{<\omega_1}$ 几乎处处单调递增的 $\omega_1^{\omega_1}$ 中的序列.*

证明　(I) 我们递归地定义所要的序列.

$f_0(\alpha) = 0\,(\alpha \in \omega_1)$.

对于 $\alpha = \beta + 1 < \omega_2$, 假设 f_β 已经被定义好, 并且序列 $\langle f_\gamma \mid \gamma < \alpha\rangle$ 是一个几乎处处单调递增的序列. 那么, 定义

$$f_\alpha(\gamma) = f_\beta(\gamma) + 1\ (\gamma \in \omega_1).$$

序列 $\langle f_\gamma \mid \gamma \leqslant \alpha\rangle$ 依旧是一个几乎处处单调递增的序列.

现在假设 $\alpha < \omega_2$ 是一个极限序数. 令 $\langle \alpha_\beta \mid \beta < \mathrm{cf}(\alpha)\rangle$ 是一个严格单调递增收敛于 α 的序列. 定义

$$f_\alpha(\gamma) = \sup(\{f_{\alpha_\beta}(\gamma) + 1 \mid \beta \leqslant \gamma\})\ (\gamma \in \omega_1).$$

那么, $f_\alpha : \omega_1 \to \omega_1$, 并且 $\forall \gamma < \alpha\ (f_\gamma <^*_{\mathscr{I}} f_\alpha)$, 其中, $\mathscr{I} = [\omega_1]^{<\omega_1}$.

序列 $\langle f_\alpha \mid \alpha < \omega_2\rangle$ 即为所求.

(II) 除了上述递归定义之外, 我们给出另外一种直接定义: 对于每一个

$$\omega_1 \leqslant \alpha < \omega_2\ ,$$

令 $h_\alpha : \omega_1 \to \alpha$ 为一双射.

对于 $\alpha < \omega_1$, 令

$$g_\alpha(\gamma) = \alpha\ (\gamma < \omega_1).$$

对于 $\omega_1 \leqslant \alpha < \omega_2$, $\gamma \in \omega_1$, 令

$$g_\alpha(\gamma) = \mathrm{ot}(h_\alpha[\gamma]).$$

序列 $\langle g_\alpha \mid \alpha < \omega_2\rangle$ 即为所求. □

2.3.1 非荟萃集理想

这里我们引进不可数正则基数上的可定义的滤子和它们的对偶理想并探讨它们的基本性质.

回顾一下不可数正则基数 κ 上的无界闭子集的概念 (定义 1.72): 子集合 $C \subseteq \kappa$ 是 κ 的一个无界闭子集当且仅当

(1) (无界) $\forall \alpha \in \kappa \, \exists \beta \in C \; (\alpha < \beta)$;

(2) (闭) $\forall \alpha \in \kappa \, ((\alpha = \bigcup(\alpha \cap C)) \to \alpha \in C)$.

我们还知道, κ 的一个子集 C 是它的一个无界闭子集的充分必要条件是 C 是某个从 κ 到 κ 的连续单增函数的像集. 这里, 我们来探讨由这些无界闭集所生成的滤子的特性.

定理 2.23 (κ-完全性) 设 κ 是一个不可数正则基数, $\gamma < \kappa$, 以及 $\langle C_\alpha \mid \alpha < \gamma \rangle$ 是长度为 γ 的在 κ 中无界的闭子集序列. 那么,

$$C = \bigcap_{\alpha<\gamma} C_\alpha = \bigcap \{C_\alpha \mid \alpha < \gamma\}$$

也是 κ 的一个无界闭子集.

证明 我们对 $2 \leqslant \gamma < \kappa$ 施归纳.

$\gamma = 2$. 设 C_0, C_1 为 κ 的两个无界闭子集. 令 $C = C_0 \cap C_1$. 易见 C 在 κ 中是闭的. 我们需要的是证明它在 κ 中无界. 设 $\beta \in \kappa$. 我们递归地定义长度为 ω 的单调递增收敛于 C 中的某个序数的序列

$$\langle \alpha_n \mid n < \omega \rangle.$$

令 $\alpha_0 = \min(C_0 - (\beta + 1))$ 以及 $\alpha_1 = \min(C_1 - (\alpha_0 + 1))$. 假设

$$\langle \alpha_{2k} < \alpha_{2k+1} \mid k \leqslant m \rangle$$

已经定义好, 并且 $\beta < \alpha_2, k \in C_0$ 以及 $\alpha_{2k+1} \in C_1$. 令

$$\alpha_{2m+2} = \min\left(C_0 - (\alpha_{2m+1} + 1)\right) \;\wedge\; \alpha_{2m+3} = \min\left(C_1 - (\alpha_{2m+2} + 1)\right).$$

然后, 令

$$\alpha = \sup(\{\alpha_{2k} \mid k \in \omega\}) = \sup(\{\alpha_{2k+1} \mid k < \omega\}) = \sup(\{\alpha_m \mid m < \omega\}).$$

那么 $\alpha = \bigcup(\alpha \cap C_0) = \bigcup(\alpha \cap C_1)$. 因此, $\alpha \in C_0 \cap C_1$.

设 $\gamma = \beta + 1 < \kappa$. 应用归纳假设以及 $\gamma = 2$ 的结论即得到所要的结论.

设 $\gamma < \kappa$ 是一个极限序数. 任意给定 $\langle C_\alpha \mid \alpha < \gamma\rangle$ 是长度为 γ 的在 κ 中无界的闭子集序列. 对于 $\alpha < \gamma$, 令

$$D_\alpha = \bigcap_{\beta \leqslant \alpha} C_\beta.$$

根据归纳假设, D_α 是 κ 的一个无界闭子集. 对于 $\alpha < \beta < \gamma$, 我们有 $D_\beta \subseteq D_\alpha$; 以及

$$C = \bigcap\{C_\alpha \mid \alpha < \gamma\} = \bigcap\{D_\alpha \mid \alpha < \gamma\}.$$

我们只需证明 C 在 κ 中无界. 为此, 对于任意给定的 $\beta < \kappa$, 我们递归地定义一个长度为 γ 的单调递增的收敛于 C 中的某个大于 β 的序数的序列.

令 $\alpha_0 = \min(D_0 - (\beta + 1))$.

假设 $\eta < \kappa$ 并且 $\alpha_\eta \in D_\eta$ 已经定义好. 令

$$\alpha_{\eta+1} = \min(D_{\eta+1} - (\alpha_\eta + 1)).$$

设 $\eta < \kappa$ 是一个极限序数, 并且 $\langle \alpha_\xi \mid \xi < \eta\rangle$ 是一个满足要求

$$(1)\, \forall \xi < \eta\ (\alpha_\xi \in D_\xi)\ \wedge\ (2)\, \forall \xi < \rho < \eta\ (\alpha_\xi < \alpha_\rho)$$

的序列. 令

$$\alpha_\eta = \sup(\{\alpha_\xi \mid \xi < \eta\}).$$

由于 κ 是一个正则序数, $\alpha_\eta < \kappa$. 对于任意的 $\rho < \eta$,

$$\alpha_\eta = \sup(\{\alpha_\xi \mid \rho \leqslant \xi < \eta\})$$

以及如果 $\rho \leqslant \xi < \eta$, 则 $\alpha_\xi \in D_\rho$. 因此, $\alpha_\eta \in D_\rho$. 于是, $\alpha_\eta \in C$. □

例 2.11　对于 $\alpha < \kappa$, 令 $C_\alpha = \kappa - (\alpha + 1)$. 那么

$$\bigcap\{C_\alpha \mid \alpha < \kappa\} = \varnothing.$$

由此可见上述定理的序列长度的限制不能放宽. 但是, 我们可以考虑对角线交.

定义 2.17 (对角线交)　设 κ 是一个不可数正则基数. 设 $\langle C_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ 是长度为 κ 的在 κ 中无界的闭子集序列. 这个序列的**对角线交**定义如下:

$$\Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha = \{\gamma \in \kappa \mid \forall \alpha < \gamma\ (\gamma \in C_\alpha)\}.$$

定理 2.24 (正规性)　设 κ 是一个不可数正则基数. 设 $\langle C_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ 是长度为 κ 的在 κ 中无界的闭子集序列. 那么这个序列的对角线交 $\Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha$ 是 κ 的一个无界闭子集.

证明 给定 $\langle C_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$. 对于 $\alpha < \kappa$, 令

$$D_\alpha = \bigcap\{C_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}.$$

根据 κ-完全性, 每一个 D_α 都是 κ 的无界闭子集, 并且, 如果 $\beta < \alpha < \kappa$, 则必有 $D_\alpha \subseteq D_\beta$. 不仅如此, 我们还有

$$\Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha = \Delta_{\alpha<\kappa} D_\alpha.$$

所以, 我们只需证明 $C = \Delta_{\alpha<\kappa} D_\alpha$ 是 κ 的一个无界闭集.

先证 C 是闭的. 假设 $\omega \leqslant \alpha = \bigcap(\alpha \cap C)$. 也就是说, $\alpha \cap C$ 在 α 中无界. 设 $\beta < \alpha$, 根据对角线交的定义,

$$((\alpha \cap C) - (\beta + 1)) \subset D_\beta.$$

从而, $\alpha = \bigcup(\alpha \cap D_\beta)$. 因此, $\alpha \in D_\beta$. 于是, $\alpha \in C$.

再证 C 在 κ 中无界. 给定 $\beta \in \kappa$. 我们递归地定义一个单调递增收敛于 C 中某个 $> \beta$ 的序数的序列.

令 $\alpha_0 = \beta$. 给定 α_n, 定义

$$\alpha_{n+1} = \min(D_{\alpha_n} - (\alpha_n + 1)).$$

令 $\alpha = \sup(\{\alpha_n \mid n < \omega\})$. 设 $\gamma < \alpha$. 令 $n = \min(\{k \in \omega \mid \alpha_k > \gamma\})$. 对于 $n < k < \omega$ 都有

$$\alpha_k \in D_{\alpha_n} \subseteq D_\gamma.$$

所以, $\alpha \in D_\gamma$. 因此, $\alpha \in C$. □

例 2.12 设 $\kappa \geqslant \omega_1$ 为一个正则基数. 设 $A \subseteq \kappa$ 为 κ 的一个无界子集. 令

$$A' = \{\alpha \in \kappa \mid A \cap \alpha \text{在}\alpha\text{中无界}\}.$$

那么, A' 是由 A 的所有极限点所组成的无界闭集. κ' 恰好就是 κ 中的所有极限序数之集. 令

$$\mathrm{Succ}(\kappa) = \{\alpha + 1 \mid \alpha \in \kappa\}$$

为所有 κ 中的后继序数之集合. 那么,

$$C_0 = (\mathrm{Succ}(\kappa))'$$

恰好是 κ 中的所有非零极限序数之集.

递归地, 对于 $\alpha < \kappa^+$, 我们定义 C_α 如下:

(i) 给定 $\alpha=\beta+1$, 令 $C_\alpha=C'_\beta$;

(ii) 给定非零极限序数 $\alpha<\kappa$, 并且 $\forall\beta<\alpha$, 无界闭子集 C_β 都已经被定义, 则令

$$C_\alpha=\bigcap_{\beta<\alpha}C_\beta;$$

(iii)$C_\kappa=\Delta_{\alpha<\kappa}C_\alpha$;

(iv) 给定极限序数 $\kappa<\alpha<\kappa^+$, 并且 $\forall\beta<\alpha$, 无界闭子集 C_β 都已经被定义, 令 $g_\alpha:\mathrm{cf}(\alpha)\to\alpha$ 为一个单调递增连续收敛于 α 的序列, 如果 $\mathrm{cf}(\alpha)<\kappa$, 则令

$$C_\alpha=\bigcap_{\beta<\mathrm{cf}(\alpha)}C_{g_\alpha(\beta)};$$

如果 $\mathrm{cf}(\alpha)=\kappa$, 则令

$$C_\alpha=\Delta_{\beta<\kappa}C_{g_\alpha(\beta)}.$$

这样, $\langle C_\alpha\mid\alpha<\kappa\rangle$ 是 κ 的一个包含关系 $\supset$ 下单调递减的无界闭子集序列; C_κ 是 κ 的一个无界闭子集; $\forall\alpha<\kappa,\alpha\in C_\kappa$ 当且仅当 α 是所有 $C_\beta\,(\beta<\alpha)$ 的极限点; $\forall\alpha<\kappa$, $(C_\kappa-(\alpha+1))\subset C_\alpha$; 对于 $\kappa\leqslant\alpha<\beta<\kappa^+$, C_β 是 κ 的一个无界闭子集; $C_{\alpha+1}\subset C_\alpha$; $(C_\beta-C_\alpha)\in[\kappa]^{<\kappa}$.

称 $\langle C_\alpha\mid\alpha<\kappa^+\rangle$ 为 κ 的**典型无界闭子集序列**.

定义 2.18 (无界闭集滤子)　设 κ 是一个不可数的正则基数. 定义

$$\mathscr{C}_\kappa=\{X\subseteq\kappa\mid\exists C\subseteq X\ C\text{ 是}\kappa\text{的一个无界闭子集}\}.$$

称 $\mathscr{C}_\kappa$ 为 κ 上 (由无界闭集生成) 的**典型滤子**, 或者**无界闭集滤子**.

定理 2.25　设 κ 是一个不可数的正则基数. 那么 $\mathscr{C}_\kappa$ 是 κ 上的一个 κ-完全正规滤子, 即

(1) $\mathscr{C}_\kappa$ 是 κ 上的一个滤子;

(2) $\mathscr{C}_\kappa$ 是 κ-完全的: 如果 $\gamma<\kappa$, $\langle X_\alpha\mid\alpha<\gamma\rangle\in\mathscr{C}^\gamma$, 那么,

$$\left(\bigcap_{\alpha<\gamma}X_\alpha\right)\in\mathscr{C}_\kappa;$$

(3) $\mathscr{C}_\kappa$ 具有正规性: 如果 $\langle X_\alpha\mid\alpha<\kappa\rangle\in\mathscr{C}^\kappa$, 那么,

$$(\Delta_{\alpha<\kappa}X_\alpha)\in\mathscr{C}_\kappa.$$

定义 2.19　设 κ 为一个不可数的正则基数, 定义

$$\mathrm{NS}_\kappa=\{X\subset\kappa\mid(\kappa-X)\in\mathscr{C}_\kappa\}.$$

称 NS_κ 为 κ 上的**典型理想**, 或者**非荟萃集理想**.

κ 上的每一个有界子集都是非荟萃集, 也就是说, $[\kappa]^{<\kappa} \subset \mathrm{NS}_\kappa$. κ 的全体后继序数的集合是一个非荟萃集, 因为 κ 的全体极限序数的集合是一个无界闭子集.

定义 2.20 (荟萃子集) 设 κ 是一个不可数的正则基数, 称 $X \subseteq \kappa$ 为 κ 的一个**荟萃子集**当且仅当

$$\forall A \in \mathscr{C}_\kappa \ (X \cap A \neq \varnothing).$$

也就是说, $A \subseteq \kappa$ 是一个荟萃集当且仅当 A 是一个 NS_κ-正测度集.

定理 2.26 (选择函数定理) 设 κ 是一个不可数的正则基数, 以及 $X \subseteq \kappa$ 为 κ 的一个荟萃子集. 如果 f 是 X 上的一个选择函数, 那么 f 必在 κ 的某个荟萃子集上的取值为一常数.

证明 设 $X \subseteq \kappa$ 为 κ 的一个荟萃子集以及 f 是 X 上的一个选择函数.

欲得一矛盾, 假设定理的结论对此 f 不成立. 那么, 对于每一个 $\alpha \in \kappa$,

$$f^{-1}(\alpha) = \{\beta \in X \mid f(\beta) = \alpha\}$$

必不是一个荟萃集, 也就是说, $f^{-1}(\alpha) \in \mathrm{NS}_\kappa$. 对于 $\alpha < \kappa$, 令 C_α 为 κ 的一个与 $f^{-1}(\alpha)$ 不相交的无界闭集. 令

$$C = \Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha.$$

根据典型滤子的正规性, C 是 κ 的一个无界闭集. 令 $\beta \in X \cap C$ 以及

$$\alpha = f(\beta) < \beta \ .$$

根据对角线交的定义, $\beta \in C_\alpha$. 但是,

$$f^{-1}(\alpha) \cap C_\alpha = \varnothing.$$

这就是一个矛盾. □

例 2.13 令 $X = \{\alpha + 1 \mid \alpha \in \omega_1\}$. 对于每一个 $\alpha \in \omega_1$, 定义 $f(\alpha+1) = \alpha$. 那么 f 是 X 上的一个单值选择函数. 当然, $X \in \mathrm{NS}_{\omega_1}$.

更一般地, 如果 $X \in \mathrm{NS}_{\omega_1}$, 令 C 为一个与 X 不相交的无界闭集, 对于 $0 < \alpha \in X$, 令

$$f(\alpha) = \max(\alpha \cap C) < \alpha,$$

那么, 对于 $\beta \in \omega_1$, 必有 $f^{-1}(\beta) \in [\omega_1]^{<\omega_1}$.

定义 2.21 (对角线并) 设 κ 是一个不可数正则基数. 设 $\langle X_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ 是长度为 κ 的非荟萃子集序列. 这个序列的**对角线并**定义如下:

$$\nabla_{\alpha<\kappa} X_\alpha = \{\gamma \in \kappa \mid \exists \alpha < \gamma \ (\gamma \in X_\alpha)\}.$$

推论 2.3 设 κ 是一个不可数正则基数.

(1) 设 $\langle X_\alpha \mid \alpha < \gamma\rangle$ 是长度为 $\gamma < \kappa$ 的非荟萃子集序列, 那么这个序列的并 $\Delta_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ 也是 κ 的一个非荟萃子集. 也就是说 κ 上的典型理想, 非荟萃集理想, NS_κ 是 κ-**可加**的.

(2) 设 $\langle X_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ 是长度为 κ 的非荟萃子集序列. 那么这个序列的对角线并 $\Delta_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ 也是 κ 的一个非荟萃子集. 也就是说, κ 上的典型理想、非荟萃集理想、NS_κ 关于对角线并是封闭的.

上面的定理表明一个不可数的正则基数上的无界闭子集滤子及其对偶理想, 非荟萃子集理想, 具有很好的完全性和正规性. 这种性质自然可以被用来区分滤子或者理想. 下面的定义由此而来.

定义 2.22 设 κ 为一个不可数的正则基数. 设 X 是一个势大于等于 κ 的集合, $\mathscr{F} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ 是 X 上的一个滤子, $\mathscr{I} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ 是 X 上的一个理想.

(1) 称 $\mathscr{F}$ 是 κ-**完全**的当且仅当 $\mathscr{F}$ 对于任意少于 κ 个其中元素的交是封闭的, 即如果 $\langle A_\alpha \in \mathscr{F} \mid \alpha < \gamma\rangle$ $(\gamma < \kappa)$, 那么 $\left(\bigcap\limits_{\alpha<\gamma} A_\alpha\right) \in \mathscr{F}$.

(2) 称 $\mathscr{I}$ 是 κ-**可加**的当且仅当 $\mathscr{I}$ 对于任意少于 κ 个其中元素的并是封闭的, 即如果 $\langle A_\alpha \in \mathscr{I} \mid \alpha < \gamma\rangle$ $(\gamma < \kappa)$, 那么 $\left(\bigcup\limits_{\alpha<\gamma} A_\alpha\right) \in \mathscr{I}$.

(3) 称 $\mathscr{F}$ 是**正规**的当且仅当 $\forall A \in \mathscr{F}^+ \, \forall f : A \to \bigcup A$ 如果 f 是 A 上的选择函数, 那么 f 一定在某个 $B \in \mathscr{F}^+$ 上取常值.

(4) 称 $\mathscr{I}$ 是**正规**的当且仅当它的对偶滤子 $\mathscr{I}^* = \{A \subseteq X \mid (X - A) \in \mathscr{I}\}$ 是一个正规滤子.

例 2.14 设 κ 是一个不可数的正则基数.

(1) κ 上的无界闭子集滤子是一个 κ-完全的正规滤子; 与之对偶的非荟萃子集理想是一个 κ-可加的正规理想.

(2) κ 上的理想 $[\kappa]^{<\kappa}$ 是一个 κ-可加的但并非正规的理想. 它是非正规的, 比如它的正测度集合 $A = \{\alpha + 1 \mid \alpha \in \kappa\}$ 上就有一个单值函数 $\alpha + 1 \mapsto \alpha$.

正如定理 2.22 所给出的在 ω_1 上存在一个长度为 ω_2 的模有界子集理想几乎处处递增的函数序列, 对于任意不可数的正则基数 κ 而言, 它上面存在着一个长度为 κ^+ 的模非荟萃集理想单调递增的典型序数函数序列.

定理 2.27 设 κ 为一个不可数的正则基数. 存在一个具备下述特性的长度为 κ^+ 的从 κ 到 κ 的函数序列

$$\left\langle f_\alpha \mid \alpha < \kappa^+ \right\rangle:$$

(1) $\forall \alpha < \kappa \; (f_0(\alpha) = 0)$;

(2) $\forall \eta < \kappa^+ \, \forall \alpha < \kappa \; (f_{\eta+1}(\alpha) = f_\eta(\alpha) + 1)$;

(3) $\forall \eta < \kappa^+$ 如果 $\eta < \kappa$ 是一个极限序数, 那么

$$\forall \alpha < \kappa \ (f_\eta(\alpha) = \sup \{ f_\beta(\alpha) + 1 \mid \beta < \alpha \}) ;$$

如果 $\kappa \leqslant \eta < \kappa^+$ 是一个极限序数, 那么一定存在一个从 κ 到 η 的双射 π 来见证如下等式:

$$\forall \alpha < \kappa \ (f_\eta(\alpha) = \mathrm{ot}(\pi[\alpha])) .$$

证明 (练习.) □

下面我们来看一些新的例子. 这些滤子或者理想在后面都有着很多用处.

定义 2.23 (ω-无界闭子集滤子) 设 κ 是一个不可数的正则基数. 令

$$\mathcal{C}_\omega(\kappa) = \{\alpha < \kappa \mid \mathrm{cf}(\alpha) = \omega\}.$$

(1) $A \subseteq \kappa$ 是一个 ω-**闭**子集当且仅当对于任意的 $\alpha \in \mathcal{C}_\omega(\kappa)$, 如果 $A \cap \alpha$ 在 α 中无界, 那么 $\alpha \in A$; A 是 κ 的一个 ω-**无界闭子集**当且仅当它在 κ 中既是无界的又是 ω-闭的.

(2) $\mathscr{C}_\omega(\kappa) = \{ A \subseteq \mathcal{C}_\omega(\kappa) \mid \exists B \subseteq A \, (B \text{ 是}\omega\text{-闭子集, 且在}\kappa\text{中无界})\}$.

定理 2.28 设 κ 是一个不可数的正则基数,

(1) $\mathcal{C}_\omega(\kappa)$ 是 κ 的一个荟萃子集, 并且是 κ 的一个 ω-无界闭子集.

(2) $\mathscr{C}_\omega(\kappa)$ 是一个非平凡的 ω_1-完全的滤子.

(3) $\mathscr{C}_\omega(\kappa) = \{A \subseteq \kappa \mid \exists C \in \mathscr{C}(\kappa) \ (C \cap \mathcal{C}_\omega(\kappa) \subseteq A)\}$.

(4) $\mathscr{C}_\omega(\kappa)$ 是一个正规滤子.

证明 (1) 设 $C \subseteq \kappa$ 是一个无界闭子集.

递归地, 令 $\alpha_0 \in C$, $\alpha_{n+1} \in (C - (\alpha_n + 1))$. 令

$$\gamma = \sup (\{ \alpha_n \mid n < \omega\}) ,$$

那么, $C \cap \gamma$ 在 γ 中无界, 并且 $\mathrm{cf}(\gamma) = \omega$. 于是 $\gamma \in C \cap \mathcal{C}_\omega(\kappa)$. 因此, $\mathcal{C}_\omega(\kappa)$ 是 κ 的一个荟萃子集. 自然, 它在 κ 中无界, 并且是 ω-闭子集.

(2) 首先, $\mathscr{C}_\omega(\kappa)$ 是非平凡的. 任意给定 $A \in [\mathcal{C}_\omega(\kappa)]^{<\kappa}$, A 在 κ 中有界, 所以, $A \notin \mathscr{C}_\omega(\kappa)$, 并且, 令 $\gamma < \kappa$ 为 A 的一个上界, 那么

$$\{ \alpha \in \mathcal{C}_\omega(\kappa) \mid \alpha > \gamma\} \in \mathscr{C}_\omega(\kappa).$$

其次, 如果 A 和 B 是 κ 的两个 ω-无界闭子集, 那么 $A \cap B$ 是 κ 的 ω-无界闭子集: 设 $\alpha \in \mathcal{C}_\omega(\kappa)$ 并且 $\alpha \cap (A \cap B)$ 在 α 中无界. 那么 $\alpha \cap A$ 与 $\alpha \cap B$ 都在 α 中无界. 因此, $\alpha \in A$ 以及 $\alpha \in B$. 故 $\alpha \in A \cap B$. 这表明 $A \cap B$ 是 ω-闭的. 我们还

需要证明 $A \cap B$ 在 κ 中无界. 为此, 给定 $\beta \in \kappa$, 递归地定义一个单调递增的序列如下:

令 $\alpha_0 \in (A-(\beta+1))$, $\alpha_1 \in (B-(\alpha_0+1))$; 给定 $k+1 \in \omega$, 假设 $\alpha_{2k} \in A$, $\alpha_{2k+1} \in B$ 满足 $\alpha_{2k} < \alpha_{2k+1}$, 令 $\alpha_{2k+2} \in (A-(\alpha_{2k+1}+1))$, 以及 $\alpha_{2k+3} \in (B-(\alpha_{2k+2}+1))$. 这样我们得到一个严格单调递增的序列 $\langle \alpha_n \mid n < \omega \rangle$. 令

$$\gamma = \sup\left(\{\alpha_n \mid n < \omega\}\right).$$

那么 $\mathrm{cf}(\gamma) = \omega$, 并且 $\beta < \gamma \in A \cap B$.

最后, 设 $\langle A_n \mid n < \omega \rangle$ 是 ω 个 κ 上的 ω-无界闭子集. 我们来证明它们的交是 κ 上的一个 ω-无界闭子集. 令 $A = \bigcap_{n<\omega} A_n$, A 自然是一个 ω-闭子集. 关键是证明它在 κ 中无界. 为此, 对于每一个 $n < \omega$, 令 $B_n = \bigcap_{k \leqslant n} A_k$. 根据上面的论证以及数学归纳法, 每一个 B_n 都是 κ 的一个 ω-无界闭子集, 这样处理之后的结果是 $B_{n+1} \subseteq B_n$. 也就是说, 新的 ω-无界闭子集序列多了一种单调性, 并且

$$A = \bigcap_{n<\omega} B_n.$$

设 $\beta < \kappa$. 递归地, 令 $\alpha_0 \in (B_0 - (\beta+1))$, $\alpha_{n+1} \in (B_{n+1} - (\alpha_n + 1))$. 这样,

(i) $\forall n < \omega\ (\alpha_n < \alpha_{n+1})$;

(ii) $\forall n < \omega\, \forall m < \omega\ (n < m \to \alpha_m \in B_n)$.

令 $\gamma = \sup\left(\{\alpha_n \mid n < \omega\}\right)$. 那么, $\beta < \gamma$, $\mathrm{cf}(\gamma) = \omega$, 并且 $\forall n < \omega\, (B_n \cap \gamma$ 在 γ 中无界 $)$. 所以, $\forall n < \omega\ (\gamma \in B_n)$. 也就是说, $\gamma \in A$.

(3) 首先, 如果 $C \subseteq \kappa$ 是一个无界闭子集, 那么 C 是一个 ω-无界闭子集, 从而 $C \cap \mathcal{C}_\omega(\kappa)$ 是 κ 的一个 ω-无界闭子集. 设 $A \subseteq \mathcal{C}_\omega(\kappa)$ 是 κ 的一个 ω-无界闭子集. 令

$$A' = \{\alpha \in A \mid \forall \beta < \alpha\, \exists \gamma \in (\alpha \cap A)\, (\beta < \gamma)\}$$

以及

$$C_A = \{\alpha \in \kappa \mid \forall \beta < \alpha\, \exists \gamma \in (\alpha \cap A)\, (\beta < \gamma)\}.$$

那么, $A' \subset A$ 是 κ 上的一个 ω-无界闭子集; C_A 是 κ 的一个无界闭子集, 并且 $A' = C_A \cap \mathcal{C}_\omega(\kappa)$.

事实上, A' 是 A 的在 A 中的极限点的全体之集合, 所以, 它在 κ 中是无界的, 因为 A 是 κ 的 ω-无界闭子集, 也是 ω-闭子集, 因为任意的 ω 个单调递增的 A' 中的元素之极限也是 A 的一个梯度为 ω 的极限点, 所以也在 A 中, 也就在 A' 中. 类似地, C_A 是 A 的所有极限点的集合, 所以它是一个无界闭子集, 因为 A 是无界子

集. 由于 C_A 的任何一个梯度为 ω 的极限点也都是 A 的一个梯度为 ω 的极限点, 所以一定在 A' 中. 因此, $A' = C_A \cap \mathcal{C}_\omega(\kappa)$.

因此, 如果 A 是 κ 的一个 ω-无界闭子集, 那么 $C_A \cap \mathcal{C}_\omega(\kappa) \subseteq A$; 如果 $C \subseteq \kappa$ 是一个无界闭子集, 那么 $C \cap \mathcal{C}_\omega(\kappa)$ 是一个 ω-无界闭子集. 于是, 所要的等式成立.

(4) $\mathscr{C}_\omega(\kappa)$ 是一个正规滤子. 这是因为根据 (3), 对于任意的 $X \subseteq \mathcal{C}_\omega(\kappa)$,

$$X \in \mathscr{C}_\omega(\kappa)^+ \iff X \text{ 是 } \kappa \text{ 的一个荟萃子集.}$$

给定 $X \subseteq \mathcal{C}_\omega(\kappa)$ 为一个荟萃子集. 设 A 是一个 ω-无界闭子集. 令 C_A 为由 A 的所有极限点所组成的无界闭子集. 令 $\alpha \cap X \cap C_A$, 那么 $\alpha \in C_A \cap \mathcal{C}_\omega(\kappa) \subseteq A$. 所以, $X \in \mathscr{C}_\omega(\kappa)^+$. 反之, 设 $X \in \mathscr{C}_\omega(\kappa)^+$. 设 C 是 κ 的一个无界闭子集. 那么 $C \cap \mathcal{C}_\omega(\kappa)$ 是一个 ω-无界闭子集, 所以 $X \cap C \neq \varnothing$. 因此, X 是 κ 的一个荟萃子集. □

ω-无界闭子集的概念 (定义 2.23) 可以进一步推广. 我们将这种推广留给有兴趣的读者.

直接应用定理 2.28 中的 (3), 我们有如下定义:

设 κ 是一个不可数的正则基数, $\lambda < \kappa$ 是一个正则基数. 令

$$\mathcal{C}_\lambda(\kappa) = \{\alpha < \kappa \mid \mathrm{cf}(\alpha) = \lambda\}$$

以及

$$\mathscr{C}_\lambda(\kappa) = \{A \subseteq \mathcal{C}_\lambda(\kappa) \mid \exists C \in \mathscr{C}(\kappa)\,(C \cap \mathcal{C}_\lambda(\kappa) \subseteq A)\}.$$

那么, $\mathscr{C}_\lambda(\kappa)$ 是 $\mathcal{C}_\lambda(\kappa)$ 上的一个非平凡的 λ^+-完全的正规滤子.

2.3.2　荟萃子集可分裂性

下面我们来证明 ω_1 上的无界闭集滤子不是一个超滤子. 为此, 我们先证明一个引理.

令 ω_1' 为 ω_1 中的所有非零极限序数之集. 对于每一个 $\alpha \in \omega_1'$, 令 $h_\alpha : \omega \to \alpha$ 为一个单调递增收敛于 α 的序列.

引理 2.11　$\exists n \in \omega\, \forall \xi \in \omega_1\, \{\alpha \in \omega_1' \mid h_\alpha(n) \geqslant \xi\}$ 是一个荟萃集.

证明　假设不然. 对于每一个 $n \in \omega$, 令 ξ_n 为最小反例, 以及 $C_n \subseteq \omega_1'$ 为与非荟萃集

$$\{\alpha \in \omega_1' \mid h_\alpha(n) \geqslant \xi_n\}$$

不相交的无界闭集. 令

$$\xi = \sup(\{\xi_n + 1 \mid n < \omega\}) \ \wedge \ C = \bigcap_{n<\omega} C_n.$$

由于 $\forall n \in \omega\, \forall \alpha \in C_n\, (h_\alpha(n) < \xi_n < \xi)$, 我们得出 $C \subset \xi$. 这是一个矛盾. □

定理 2.29 (分裂定理) *存在 ω_1 个彼此互不相交的 ω_1 的荟萃子集.*

证明 对于每一个 $\alpha \in \omega_1'$, 令 $h_\alpha : \omega \to \alpha$ 为一个单调递增收敛于 α 的序列. 令 $n_0 \in \omega$ 为满足上述引理断定的性质的最小自然数. 对于每一个 $\xi < \omega_1$, 令

$$X_\xi = \{\alpha \in \omega_1' \mid h_\alpha(n_0) \geqslant \xi\}.$$

我们现在递归地定义序列:

首先, X_ω 是一个荟萃集. 对于每一个 $\alpha \in X_\omega$, 令

$$f(\alpha) = h_\alpha(n_0) < \alpha.$$

那么, f 是 X_ω 上的一个选择函数. 根据选择函数定理 (定理 2.26), 令 (S_0, ξ_0) 为具备下述性质的序对: $S_0 \subset X_\omega$ 为一荟萃集, f 在 S_0 取常值 ξ_0.

假设序列 $\langle (S_\gamma, \xi_\gamma) \mid \gamma < \alpha \rangle$ 已经定义好, 并且

$$\forall \gamma < \beta < \alpha \, (\xi_\gamma < \xi_\beta \ \wedge \ \forall \eta \in S_\gamma \ (h_\eta(n_0) = \xi_\gamma)).$$

设 $\alpha = \beta + 1$. 那么, $X_{\xi_\beta + 1}$ 是一个荟萃子集. 应用选择函数定理 (定理 2.26), 得到序对 (S_α, ξ_α) 满足要求:

$$S_\alpha \subseteq X_{\xi_\beta+1} \text{ 是一荟萃集, 并且 } \forall \gamma \in S_\alpha \ (h_\gamma(n_0) = \xi_\alpha > \xi_\beta).$$

设 $\alpha < \omega_1$ 是一个极限序数. 令 $\rho_\alpha = \sup(\{\xi_\beta + 1 \mid \beta < \alpha\})$. 那么, X_{ρ_α} 是一个荟萃集. 应用佛多引理, 得到序对 (S_α, ξ_α) 满足如下要求:

$$S_\alpha \subseteq X_{\xi_\beta+1} \text{ 是一荟萃集, 并且 } \forall \gamma \in S_\alpha \ (h_\gamma(n_0) = \xi_\alpha \geqslant \rho_\alpha).$$

这样, 我们得到序列 $\langle (S_\alpha, \xi_\alpha) \mid \alpha < \omega_1 \rangle$. 这个序列有如下性质:

(1) 每一个 S_α 都是荟萃集;

(2) 对于每一个 $\gamma \in S_\alpha$ 都有 $h_\gamma(n_0) = \xi_\alpha$.

从而, 对于 $\alpha < \beta < \omega_1$ $(S_\alpha \cap S_\beta = \varnothing)$. □

现在我们来将 ω_1 上的荟萃集分裂定理 (定理 2.29) 的证明推广到下面的荟萃集分裂定理的证明.

定理 2.30 *设 λ 是一个不可数的正则基数. 令 $\mathcal{C}_\omega(\lambda) = \{\alpha < \lambda \mid \mathrm{cf}(\alpha) = \omega\}$. 那么 $\mathcal{C}_\omega(\lambda)$ 是 λ 个彼此互不相交的 λ 的荟萃子集的并.*

证明 令 $E = \mathcal{C}_\omega(\lambda)$. 对于每一个 $\alpha \in E$, 令 $h_\alpha : \omega \to \alpha$ 为一个单调递增收敛于 α 的序列.

断言 *$\exists n \in \omega \, \forall \xi \in \lambda \, \{\alpha \in E \mid h_\alpha(n) \geqslant \xi\}$ 是一个荟萃集.*

假设不然. 对于每一个 $n \in \omega$, 令 ξ_n 为最小反例, 以及 $C_n \subseteq E$ 为与非荟萃集

$$\{\alpha \in E \mid h_\alpha(n) \geqslant \xi_n\}$$

不相交的 ω-无界闭子集. 令

$$\xi = \sup(\{\xi_n + 1 \mid n < \omega\}) \ \wedge \ C = \bigcap_{n<\omega} C_n.$$

由于 $\forall n \in \omega \, \forall \alpha \in C_n \, (h_\alpha(n) < \xi_n < \xi)$, 我们得出 $C \subset \xi$. 这是一个矛盾.

令 $n_0 \in \omega$ 为满足上述断言的性质的最小自然数. 对于每一个 $\xi < \lambda$, 令

$$X_\xi = \{\alpha \in E \mid h_\alpha(n_0) \geqslant \xi\}.$$

我们现在递归地定义序列:

首先, X_ω 是一个荟萃集. 对于每一个 $\alpha \in X_\omega$, 令

$$f(\alpha) = h_\alpha(n_0) < \alpha.$$

那么, f 是 X_ω 上的一个选择函数. 根据选择函数定理 (定理 2.26), 令 (S_0, ξ_0) 为具备下述性质的序对: $S_0 \subset X_\omega$ 为一荟萃集, f 在 S_0 取常值 ξ_0.

假设序列 $\langle (S_\gamma, \xi_\gamma) \mid \gamma < \alpha \rangle$ 已经定义好, 并且

$$\forall \gamma < \beta < \alpha \, (\xi_\gamma < \xi_\beta \ \wedge \ \forall \eta \in S_\gamma \ (h_\eta(n_0) = \xi_\gamma)).$$

设 $\alpha = \beta + 1$. 那么, $X_{\xi_\beta + 1}$ 是一个荟萃子集. 应用选择函数定理 2.26, 得到序对 (S_α, ξ_α) 满足要求:

$$S_\alpha \subseteq X_{\xi_\beta+1} \text{ 是一荟萃集, 并且 } \forall \gamma \in S_\alpha \ (h_\gamma(n_0) = \xi_\alpha > \xi_\beta).$$

设 $\alpha < \lambda$ 是一个极限序数. 令 $\rho_\alpha = \sup(\{\xi_\beta + 1 \mid \beta < \alpha\})$. 那么, X_{ρ_α} 是一个荟萃集. 应用选择函数定理 (定理 2.26), 得到序对 (S_α, ξ_α) 满足如下要求:

$$S_\alpha \subseteq X_{\xi_\beta+1} \text{ 是一荟萃集, 并且 } \forall \gamma \in S_\alpha \ (h_\gamma(n_0) = \xi_\alpha \geqslant \rho_\alpha).$$

这样, 我们得到序列 $\langle (S_\alpha, \xi_\alpha) \mid \alpha < \omega_1 \rangle$. 这个序列有如下性质:

(1) 每一个 S_α 都是荟萃集;

(2) 对于每一个 $\gamma \in S_\alpha$ 都有 $h_\gamma(n_0) = \xi_\alpha$.

从而, 对于 $\alpha < \beta < \lambda$ $(S_\alpha \cap S_\beta = \varnothing)$. □

问题 2.3 *ω_1 上是否存在 ω_2 个模非荟萃集理想几乎处处不相交的荟萃子集?*

寻求对这个问题的解答曾经极大地促进了集合论探索的发展. 称 NS = NS$_{\omega_1}$ 是**饱和的**如果在 ω_1 上不存在 ω_2 个模非荟萃集理想几乎处处不相交的荟萃子集. 上面问题所追问的是 NS 是否可以饱和? 后面我们会看到, 这个问题的答案不仅是独立于 ZFC 理论的, 而且 NS 的这种饱和特性是一种大基数性质. 我们将在本《导引》的第三卷第 2 章第 III.2.7 节中专门来讨论 NS 饱和性的合理性答案所持有的大基数特点.

下面, 我们在一个独立于 ZFC 的组合命题下给出上述问题的肯定回答.

定义 2.24 *称 $[\omega_1]^{<\omega_1}$ 上的一个序列 $\langle S_\alpha \mid \alpha < \omega_1\rangle$ 为一个***钻石序列***当且仅当*

$$\forall X \subseteq \omega_1\ \{\alpha \in \omega_1 \mid X \cap \alpha = S_\alpha\} \text{ 是一荟萃集.}$$

钻石原理: *存在一个钻石序列.*

钻石原理由鄢森[9]提出, 并且证明了钻石原理在哥德尔的可构成集论域中成立, 从而与 ZFC 不相冲突.

定理 2.31 *假设钻石原理成立. 那么, ω_1 上存在 $2^{\aleph_1}$ 个模非荟萃集理想几乎处处不相交的荟萃集.*

证明 设 $\langle S_\alpha \mid \alpha < \omega_1\rangle$ 为一个钻石序列. 对于每一个 $X \in \mathfrak{P}(\omega_1)$, 令

$$T_X = \{\alpha \in \omega_1 \mid X \cap \alpha = S_\alpha\}.$$

那么, T_X 是一个荟萃集. 假设 $X \neq Y$ 是 ω_1 的两个不相等的子集. 令

$$\gamma = \min(X \triangle Y).$$

设 $\alpha \in T_X \cap T_Y$. 那么, $X \cap \alpha = S_\alpha = Y \cap \alpha$. 所以, $\alpha \leqslant \gamma$. 也就是说,

$$T_X \cap T_Y \subseteq \min(X \triangle Y). \qquad \square$$

定理 2.32 *假设钻石原理成立. 那么连续统假设成立.*

证明 设 $\langle S_\alpha \mid \alpha < \omega_1\rangle$ 为一个钻石序列. 对于每一个 $X \in \mathfrak{P}(\omega)$, 令

$$T_X = \{\alpha \in \omega_1 \mid X \cap \alpha = S_\alpha\ \wedge\ \omega < \alpha\}.$$

那么, T_X 是 ω_1 的一个荟萃集. 令 $g(X) = \min(T_X)$ 于是,

$$S_{g(X)} = X \cap g(X) = X.$$

从而, 如果 X 和 Y 是 ω 的两个不相等的子集, 那么 $g(X) \neq g(Y)$. 所以,

$$|\mathfrak{P}(\omega)| \leqslant \omega_1. \qquad \square$$

9 Ronald Jensen.

尽管 $\mathscr{C}_{\omega_1}$ 不是一个超滤子, 但是根据塔尔斯基定理, $\mathscr{C}_{\omega_1}$ 一定可以扩展成一个超滤子.

问题 2.4 *在 ω_1 上是否存在一个 ω_1-完全的超滤子 $\mathscr{F} \supset \mathscr{C}_{\omega_1}$?*

下面我们来证明这个问题的答案在选择公理成立的论域中是否定的.

假设 $\mathscr{U}$ 是 ω_1 上的一个非平凡的 ω_1-完全的超滤子.

令 X 为一个势为 ω_1 的从 ω 到 $\{0,1\}$ 的函数之集. 令 $H : X \to \omega_1$ 为一个双射. 令

$$\mathscr{V} = \{A \subseteq X \mid H[A] \in \mathscr{U}\}.$$

那么, $\mathscr{V}$ 是 X 上的一个非平凡的 ω_1-完全的超滤子. 对于 $n < \omega$, 令

$$X_n^0 = \{f \in X \mid f(n) = 0\} \text{ 以及 } X_n^1 = \{f \in X \mid f(n) = 1\};$$

再令 $\epsilon_n \in \{0,1\}$ 满足 $X_n^{\epsilon_n} \in \mathscr{V}$.

令 $Y = \bigcap\limits_{n<\omega} X_n^{\epsilon_n}$. 根据 ω_1-完全性, $Y \in \mathscr{V}$. 但是, 如果 $f \in Y$, 那么,

$$\forall n < \omega \left(f(n) = \epsilon_n\right) .$$

所以, $|Y| \leqslant 1$, 这与 $\mathscr{U}$, 因而 $\mathscr{V}$, 非平凡相矛盾.

既然在选择公理成立的条件下第一个不可数的基数 ω_1 上不存在非平凡的 ω_1-完全的超滤子, 一个自然的问题便产生了：

问题 2.5 *是否存在一个不可数的基数 κ 以至于在 κ 之上存在非平凡的 κ-完全的超滤子?*

我们将在后面的高阶无穷公理一章中来回答这一问题, 因为这个问题的肯定答案会将我们带入一个前所未见的崭新的集合宇宙.

2.3.3 广义无界闭子集与荟萃子集

在 2.3.1 小节中, 我们引进了不可数正则基数上的无界闭子集滤子以及它们的对偶理想和非荟萃子集理想. 那么, 对于奇异基数而言, 它们之上可否有类似可定义的滤子和理想呢？一般的集合之上, 尤其是一些重要的传递集合之上, 是否也有类似的可定义的滤子和理想呢？当然, 给定任意的一个正则基数 κ, 任给一个势大于或者等于 κ 的集合 X, 它的所有势严格小于 κ 的子集合的全体构成一个可定义的具有 κ-可加性的理想. 一般而言, 这种理想并不具备某些我们想要的特性, 比如, 正规性. 然而, 这种集合恰恰可以成为我们定义新滤子的基础.

我们来看一个简单的事实. 这个事实是不可数正则基数上的无界闭子集的一个基本特性的直接推广. 我们知道, 一个不可数正则基数 κ 上的无界闭子集滤子事实上由所有定义在 κ 之上在 κ 中取值的单调递增连续函数的不动点的集合所生成

(见定理 1.73 和定理 1.74). 由于一般集合上并不具备任何拓扑结构, 这种函数的单调性或连续性便无从谈起. 下面的简单事实则帮助我们从这种特殊要求中解脱出来.

事实 设 κ 是一个不可数正则基数. 令 $f:\kappa\to\kappa$, $g:[\kappa]^{<\omega}\to\kappa$. 那么

(1) 集合 $C_f=\{\alpha<\kappa \mid \forall\beta<\alpha\,(f(\beta)\in\alpha)\}$ 是 κ 的一个无界闭子集;

(2) 集合 $C_g=\{\alpha<\kappa \mid \forall e\in[\alpha]^{<\omega}\,(g(e)\in\alpha)\}$ 是 κ 的一个无界闭子集;

(3) 如果 f 是一个单调递增的连续函数, 那么

$$C_f=\{\alpha<\kappa \mid f(\alpha)=\alpha\}.$$

证明 (1) C_f 自然是闭子集, 因为如果 $\alpha\cap C_f$ 在 α 中无界, 对于 $\beta<\alpha$, 令 $\beta<\gamma\in\alpha\cap C_f$, 于是 $f(\beta)\in\gamma$, 从而, $f(\beta)\in\alpha$, 这就意味着 $\alpha\in C_f$.

C_f 在 κ 中是无界的. 给定 $\beta<\kappa$, 令

$$\alpha_0=\sup(f[(\beta+1)]\cup(\beta_0+1)),\quad \alpha_{n+1}=\sup\left(f\left[(\alpha_n+1)\right]\cup(\alpha_n+1)\right).$$

令 $\gamma=\sup\left(\{\alpha_n \mid n<\omega\}\right)$. 那么 $\beta<\gamma$, 并且对于任意的 $\alpha<\gamma$, 令 $n<\omega$ 足够大以至于 $\alpha<\alpha_n$, 则 $f(\alpha)\in\alpha_{n+1}\subset\gamma$. 所以, $\gamma\in C_f$.

(2) C_g 是闭子集: 设 $\alpha\cap C_g$ 在 α 中无界. 令 $e\in[\alpha]^{<\omega}$. 令 $\beta\in\alpha\cap C_g$ 满足 $e\in[\beta]^{<\omega}$. 因为 e 是一个有限集合, $\exists\beta\in\alpha\cap C_g$ $(\beta>\max(e))$, 所以满足要求的 β 存在. 根据定义, $g(e)\in\beta\subset\alpha$. 于是, $\alpha\in C_g$.

C_g 在 κ 中无界: 任给 $\beta<\kappa$, 令

$$\alpha_0=\sup\left(g\left[[(\beta+1)]^{<\omega}\right]\cup(\beta_0+1)\right),\ \alpha_{n+1}=\sup\left(g\left[[(\alpha_n+1)]^{<\omega}\right]\cup(\alpha_n+1)\right).$$

令 $\gamma=\sup\left(\{\alpha_n \mid n<\omega\}\right)$, 那么 $\beta<\gamma$, 并且对于任意的 $e\in[\gamma]^{<\omega}$, 令 $n<\omega$ 足够大以至于 $e\subset\alpha_n$, 则 $g(e)\in\alpha_{n+1}\subset\gamma$. 所以, $\gamma\in C_g$.

(3) 设 $f:\kappa\to\kappa$ 为一个单调递增的连续函数. 如果 $\alpha\in C_f$, 那么 $\forall\beta<\alpha\,(\beta\leqslant f(\beta)<\alpha)$, 所以, 根据连续性, $f(\alpha)=\alpha$; 如果 $f(\alpha)=\alpha$, $\beta<\alpha$, 那么 $f(\beta)<f(\alpha)=\alpha$, 所以 $\alpha\in C_f$. □

由以上事实可见, 不可数正则基数上的无界闭子集事实上与它上面的正则性或者拓扑性质几乎没有什么实质性的关系, 因为任何一个无界闭子集不过是某一个函数的闭包点的集合. 这样, 我们便可以将无界闭子集的概念推广到任意一个不可数的集合之上.

可数子集空间

我们从可数子集空间上的无界闭子集开始. 这是对 ω_1 上的无界闭子集概念的自然推广, 也是对 $\mathcal{C}_\omega(\kappa)$ 上的无界闭子集概念的自然推广. 在很多情形下可数子集空间上的无界闭子集滤子显得很重要.

定义 2.25 (可数子集空间上无界闭子集) 设 X 是一个不可数集合. 令 $[X]^\omega = \{A \subset X \mid |A| = \omega\}$.

(1) $C \subseteq [X]^\omega$ 在 $[X]^\omega$ 上是**无界**的当且仅当 $\forall a \in [X]^\omega \exists b \in C\,(a \subseteq b)$;

(2) $C \subseteq [X]^\omega$ 在 $[X]^\omega$ 上是**闭**的当且仅当 C 中的任意长度为 ω 的 $\subseteq$-单调递增序列

$$a_0 \subseteq a_1 \subseteq \cdots \subseteq a_n \subseteq a_{n+1} \subseteq \cdots$$

(其中每一个 $a_n \in C$) 的极限 $\bigcup_{n<\omega} a_n$ 都在 C 中;

(3) $C \subseteq [X]^\omega$ 在 $[X]^\omega$ 上是一个**无界闭子集**当且仅当它在 $[X]^\omega$ 上既是无界的又是闭的;

(4) $S \subseteq [X]^\omega$ 是 $[X]^\omega$ 的一个**荟萃子集**当且仅当对于 $[X]^\omega$ 上的每一个无界闭子集 C 而言, $S \cap C \neq \varnothing$.

例 2.15 集合 $\omega_1 - \omega$ 是 $[\omega_1]^\omega$ 上的一个无界闭子集; 并且如果 $C \subseteq (\omega_1 - \omega)$ 是 ω_1 的一个无界闭子集, 那么 C 也是 $[\omega_1]^\omega$ 上的一个无界闭子集; 反之亦然; 如果 $S \subseteq [\omega_1]^\omega$, 那么 S 是 $[\omega_1]^\omega$ 上的荟萃子集当且仅当 $S \cap \omega_1$ 是 ω_1 上的一个荟萃子集.

可数子集空间 $[X]^\omega$ 上的闭子集事实上具备一种看起来更强的封闭性. 称 $C \subseteq [X]^\omega$ 为一个**共顶**集合当且仅当 $\forall A \in C \forall B \in C \exists D \in C\,(A \cup B \subseteq D)$. 任何一个 $\subseteq$-单调递增的序列都形成一个共顶集合. 反之未必.

引理 2.12 设 X 为一个不可数集合. $C \subseteq [X]^\omega$. 那么 C 是一个闭子集当且仅当如果 $D \subseteq C$ 是一个可数共顶子集, 则 $(\bigcup D) \in C$.

证明 条件自然是充分的. 需要证明必要性. 设 C 是一个闭子集, $D \subseteq C$ 是一个可数共顶子集. 设 $D = \{A_n \mid n < \omega\}$. 递归地, 令 $B_0 = A_0$. 此时 B_0, A_1 都是 D 中的两个元素, 根据 D 的共顶特性, 存在一个 $A_k \in D$ 来覆盖它们的并, 即 $A_k \supseteq B_0 \cup A_1$. 令 $k = \min\{m \mid B_0 \cup A_1 \subseteq A_m\}$, 以及 $B_1 = A_k$. 给定 B_n. $k = \min\{m \mid B_n \cup A_{n+1} \subseteq A_m\}$, 以及 $B_{n+1} = A_k$. 于是,

$$B = \bigcup_{n<\omega} B_n = \bigcup_{n<\omega} A_n = \bigcup D.$$

由于 $B_n \subseteq B_{n+1}$, 且都是 C 中的元素, 以及 C 是闭的, $B \in C$. □

定理 2.33 设 X 是一个不可数集合.

(1) (σ-完全性) 如果 $\langle C_n \mid n < \omega \rangle$ 是 $[X]^\omega$ 上的无界闭子集的一个序列, 那么它们的交集 $\bigcap_{n<\omega} C_n$ 也是 $[X]^\omega$ 上的一个无界闭子集;

(2) (正规性) 如果 $\langle C_a \mid a \in X \rangle$ 是定义在 X 上的取值为 $[X]^\omega$ 上的无界闭子

集的一个函数, 那么这个函数的**对角线交**

$$\Delta\{C_a \mid a \in X\} = \left\{A \in [X]^\omega \;\middle|\; A \in \bigcap_{a\in A} C_a\right\}$$

也是 $[X]^\omega$ 上的一个无界闭子集;

(3) (正规性) 如果 $S \subseteq [X]^\omega$ 是一个 $[X]^\omega$ 上的荟萃子集, f 是定义在 S 上的一个选择函数, 那么 f 一定在 S 的一个荟萃子集 $T \subseteq S$ 上取一常值.

证明　(1) 先证两个无界闭子集的交是一个无界闭子集. 设 C_1 和 C_2 为两个无界闭子集. 令 C 为 $C_1 \cap C_2$. C 自然是闭的. 欲证 C 在 $[X]^\omega$ 中无界, 令 $A \in [X]^\omega$. 递归地定义 A_n 与 B_n 以期满足下述要求:

$$A \subseteq A_0 \in C_1,\ A_0 \subseteq B_0 \in C_2,\ B_n \subseteq A_{n+1} \in C_1,\ A_{n+1} \subseteq B_{n+1} \in C_2.$$

令 $B = \bigcup\limits_{n<\omega} A_n = \bigcup\limits_{n<\omega} B_n$. 那么 $B \in C_1 \cap C_2$, 并且 $A \subseteq B$.

给定 $[X]^\omega$ 上的无界闭子集的一个序列 $\langle C_n \mid n < \omega\rangle$, 对于 $n < \omega$, 令

$$D_n = \bigcap_{k\leqslant n} C_k.$$

根据前面的结论和归纳法得知每一个 D_n 都是 $[X]^\omega$ 上的一个无界闭子集, 并且这个序列具有 $\subseteq$ 下的单调递减特性: 对于每一个自然数 n 都有 $D_{n+1} \subseteq D_n$. 令

$$C = \bigcap_{n<\omega} D_n = \bigcap_{n<\omega} C_n.$$

设 $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \cdots$ 为 C 上的一个单调递增序列,

$$A = \bigcup_{n<\omega} A_n,$$

对于每一个 $n, m < \omega$, $A_n \in D_m$, 所以对于每一个 $m < \omega$ 都有 $A \in D_m$, 从而, $A \in C$. 也就是说, C 是一个闭子集. 欲证 C 在 $[X]^\omega$ 中是无界的, 任取 $B \in [X]^\omega$, 令 $B \subseteq A_0 \in D_0$, 递归地, 给定 A_n, 令 $A_{n+1} \in D_{n+1}$ 满足不等式 $A_n \subseteq A_{n+1}$. 令 $A = \bigcup\limits_{n<\omega} A_n$. 那么, 对于每一个 $m < \omega$, 都有

$$A = \bigcup_{m\leqslant n<\omega} A_n,$$

从而 $A \in D_m$. 于是, $A \in C$ 满足不等式 $B \subseteq A$.

(2) 给定定义在 X 上的取值为 $[X]^\omega$ 上的无界闭子集的一个函数 $\langle C_a \mid a \in X\rangle$, 令

$$C = \{\, A \in [X]^\omega \mid \forall a \in A\ (A \in C_a)\}\,.$$

先证 C 是一闭子集. 设 $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \cdots$ 为 C 上的一个单调递增序列,

$$A = \bigcup_{n<\omega} A_n.$$

设 $a \in A$. 那么 $\exists m < \omega\, \forall m \leqslant n < \omega\ (a \in A_n)$, 从而 $\exists m < \omega\, \forall m \leqslant n < \omega\ (A_n \in C_a)$, 于是, $A \in C_a$. 因此, $A \in C$.

再证 C 在 $[X]^\omega$ 上是无界的. 为此, 任取 $A_0 \in [X]^\omega$. 递归地定义 $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \cdots$ 如后: 给定 A_n, 对于每一个 $a \in A_n$, 取 $B(n,a) \in C_a$ 来覆盖 A_n, 即 $A_n \subseteq B(n,a)$. 令

$$A_{n+1} = \bigcup\{B(n,a) \mid a \in A_n\}.$$

因为 A_n 是 X 的可数子集, 每一个 $B(n,a)$ 都是 X 的可数子集, 所以 A_{n+1} 也是 X 的一个可数子集. 令

$$A = \bigcup_{n<\omega} A_n.$$

A 是 X 的一个可数子集. 我们需要证明 $A \in C$. 为此, 设 $a \in A$. 欲得 $A \in C_a$. 注意序列

$$\langle B(n,a) \mid n < \omega\rangle.$$

事实上, 我们有

$$A_0 \subseteq B(0,a) \subseteq A_1 \subseteq B(1,a) \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq B(n,a) \subseteq \cdots,$$

从而 $A = \bigcup_{n<\omega} B(n,a)$, 并且每一个 $B(n,a) \in C_a$. 因此, $A \in C_a$.

(3) 设 $S \subseteq [X]^\omega$ 为一个荟萃子集, f 是定义在 S 上的一个选择函数. 欲证 f 一定在 S 的某一个荟萃子集上取常值. 用反证法. 假设不然. 那么, 对于每一个 $a \in X$, 集合

$$T_a = \{\, A \in [X]^\omega \mid f(A) = a\}$$

一定是非荟萃集. 于是, 对于每一个 $a \in X$, 令 C_a 为 $[X]^\omega$ 上的一个与 T_a 不相交的无界闭子集. 令

$$C = \{\, A \in [X]^\omega \mid \forall a \in A\ (A \in C_a)\}\,.$$

根据 (2), C 是 $[X]^\omega$ 上的一个无界闭子集. 于是, $S\cap C\neq\varnothing$. 令 $A\in S\cap C$, 以及 $a=f(A)\in A$. 那么根据 C 的定义, $A\in C_a$. 可是从 $a=f(A)$ 得知 $A\in T_a$. 这与 $C_a\cap T_a=\varnothing$ 相矛盾. □

定义 2.26 (可数子代数) 设 X 是一个不可数集合. 对于 $f:[X]^{<\omega}\to X$, 令

$$C_f=\left\{A\in[X]^\omega \mid \forall e\in[A]^{<\omega}\,(f(e)\in A)\right\},$$

并且称 C_f 是 f 的可数**封闭子集**的集合; 称 C_f 中的每一个元素为**代数** (X,f) 的一个**可数子代数**.

引理 2.13 设 X 是一个不可数集合, 以及 $f:[X]^{<\omega}\to X$. 那么 C_f 是 $[X]^\omega$ 上的一个无界闭子集. 称之为由 f 所确定的 $[X]^\omega$ 的**无界闭子集**;

证明 首先我们来证 C_f 是闭子集. 设 $A_0\subseteq A_1\subseteq\cdots\subseteq A_n\subseteq A_{n+1}\subseteq\cdots$ 为 C_f 上的一个单调递增序列,

$$A=\bigcup_{n<\omega}A_n.$$

设 $e\in[A]^{<\omega}$. 令 n 足够大以至于 $e\in[A_n]^{<\omega}$. 那么 $f(e)\in A_n\subseteq A$. 于是, $A\in C_f$.

次证 C_f 在 $[X]^\omega$ 中是无界的. 为此, 任取 $A_0\in[X]^\omega$. 给定 A_n, 令

$$A_{n+1}=A_n\cup\left\{f(e)\ \middle|\ e\in[A_n]^{<\omega}\right\}.$$

最后令 $A=\bigcup\limits_{n<\omega}A_n$. 此 $A\supseteq A_0$ 是 (X,f) 的一个子代数, 因为任给 $e\in[A]^{<\omega}$, e 必是某个 A_n 的一个有限子集, 于是 $f(e)\in A_{n+1}\subseteq A$. 因此, $A\in C_f$. □

引理 2.14 设 X 是一个不可数集合, 以及 $f:[X]^{<\omega}\to[X]^\omega$. 令

$$D_f=\left\{A\in[X]^\omega \mid \forall e\in[A]^{<\omega}\,(f(e)\subseteq A)\right\}.$$

那么, D_f 是 $[X]^\omega$ 上的一个无界闭子集.

证明 (练习.) □

定理 2.34 设 X 是一个不可数集合. 如果 C 是 $[X]^\omega$ 上的一个无界闭子集, 那么一定存在一个函数 $f:[X]^{<\omega}\to X$ 来见证 $C_f\subseteq C$.

证明 设 $C\subseteq[X]^\omega$ 是一个无界闭子集. 不妨设 $X=|X|=\lambda$.

对于每一个 $\alpha\in\lambda$, 令 $G(\{\alpha\})\in C$ 满足要求: $\alpha\in G(\{\alpha\})$. 假设 $G:[\lambda]^{\leqslant n}\to C$ 已经有定义, 并且满足要求: $e\subset G(e)$, 以及若 $e_1\subset e$ 则 $G(e_1)\subseteq G(e)$. 对于 $e\in[\lambda]^{n+1}$, 令

$$A_e=\bigcup\left\{G(a)\ \middle|\ a\in[e]^{\leqslant n}\right\}.$$

令 $G(e)\in C$ 满足 $G(e)\supseteq A_e\cup e$. 这样, 我们得到一个 $G:[\lambda]^{<\omega}\to C$ 满足如下要求:

(a) $\forall e \in [\lambda]^{<\omega}\,(e \subset G(e))$;

(b) $\forall e \in [\lambda]^{<\omega}\,\forall a \subseteq e\,(G(a) \subset G(e))$.

断言一 $D_G \subseteq C$.

设 $A \in D_G$. 令 $A = \{a_n \mid n < \omega\}$ 为一个单一列表. 对于 $n < \omega$, 令 $e_n = \{a_k \mid k \leqslant n\}$. 那么 $e_n \subset G(e_n) \subseteq G(e_{n+1})$, 以及 $G(e_n) \in C$. 因此

$$A = \bigcup_{n<\omega} G(e_n).$$

从而 $A \in C$.

对于每一个 $G(e)$, 固定一个列表函数 $h_e : (\omega - \{0\}) \cong G(e)$. 对于 $1 \leqslant k < \omega$, 对于 $e \in [\lambda]^{<\omega}$, 令 $g_k(e) = h_e(k)$. 从而

$$\forall e \in [\lambda]^{<\omega}\ (G(e) = \{\, g_k(e) \mid 1 \leqslant k < \omega\}).$$

对 $(n, m) \in \omega \times \omega$, 令 $\pi(n, m) = \dfrac{(n+m)(n+m+1)}{2} + n$. 那么 $\pi : \omega \times \omega \cong \omega$ 是一个双射. 令

$$\pi^{-1} : \omega \ni n \mapsto (k_n, m_n) \in \omega \times \omega.$$

如下定义 $f : [\lambda]^{<\omega} \to \lambda$:

(i) 对于 $\alpha \in \lambda$, 令 $f(\{\alpha\}) = \alpha + 1$;

(ii) 对于 $e = \{\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n\}$, 令 $f(e) = g_{k_n}(\{\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{m_n}\})$.

断言二 $C_f \subseteq D_G$.

设 $A \in C_f$, 我们来证明 $A \in D_G$. 为此, 需证明 $\forall e \in [A]^{<\omega}\, G(e) \subseteq A$.

设 $e \in [A]^{<\omega}$, $e \neq \varnothing$, 令 $m + 1 = |e|$. 根据定义, $\forall a \in [A]^{<\omega}\,(f(a) \in A)$. 由此, 我们知道 $f(e) \in A$. 因为 $\forall \alpha \in A\,(f(\{\alpha\}) = (\alpha+1) \in A)$, 所以 $\forall \alpha \in A\,(\alpha + \omega \subset A)$. 对于 $1 \leqslant k < \omega$, 令 $n = \pi(k, m+1)$, 对于 $i \leqslant (n - m)$, 令 $\alpha_{m+i} = \max(e) + i$. 那么, $g_k(e) = f(e \cup \{\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \cdots, \alpha_n\}) \in A$. 所以,

$$G(e) = \{g_k(e) \mid 1 \leqslant k < \omega\} \subseteq A.$$

因此, $A \in D_G$. □

推论 2.4 设 X 是一个不可数集合, 那么, $S \subseteq [X]^{\omega}$ 是 $[X]^{\omega}$ 上的一个荟萃子集当且仅当对于任意的代数 (X, f) 而言, S 中都有它的一个可数子代数 $A \in S$ (即 $f[[A]^{<\omega}] \subseteq A$.)

前面我们分析滤子 $\mathscr{C}_{\omega}(\kappa)$ 的时候得出这个滤子与不可数正则基数 κ 上的无界闭子集滤子 $\mathscr{C}(\kappa)$ 之间的一种关联 (见定义 2.23 以及定理 2.24). 类似的关联也在可数子代数无界闭子集滤子之间存在. 接下来我们就探讨一下满足 $\subset$ 不等式关系

的两个不可数集合上的无界闭子集与荟萃子集之间的**提升**与**降落**关联 (后面我们将有机会看到这种关联的作用).

定义 2.27 (提升与降落)　设 $X \subset Y$ 为两个不可数集合.

(1) 对于每一个 $D \subseteq [X]^\omega$, 令

$$D \uparrow Y = \{A \in [Y]^\omega \mid A \cap X \in D\}.$$

称 $D \uparrow Y$ 为 D 在 $[Y]^\omega$ 上的**提升**.

(2) 对于每一个 $D \subseteq [Y]^\omega$, 令

$$D \downarrow X = \{A \cap X \mid A \in D\}.$$

称 $D \downarrow X$ 为 D 在 $[X]^\omega$ 上的**降落**.

(记号 $\uparrow$ 可以读为 "提升到"; 记号 $\downarrow$ 可以读为 "降落到".)

定理 2.35　设 $X \subset Y$ 为两个不可数集合.

(1) 如果 $C \subseteq [X]^\omega$ 是 $[X]^\omega$ 上的一个无界闭子集, 那么 C 在 Y 上的提升 $C \uparrow Y$ 就是 $[Y]^\omega$ 上的一个无界闭子集; 从而, 如果 $S \subseteq [Y]^\omega$ 是 $[Y]^\omega$ 上的一个荟萃子集, 那么 S 在 X 上的降落 $S \downarrow X$ 就是 $[X]^\omega$ 上的荟萃子集.

(2) 如果 $C \subseteq [Y]^\omega$ 是 $[Y]^\omega$ 上的一个无界闭子集, 那么 C 在 X 上的降落 $C \downarrow X$ 就包含了 $[X]^\omega$ 上的一个无界闭子集; 从而, 如果 $S \subseteq [X]^\omega$ 是 $[X]^\omega$ 上的一个荟萃子集, 那么 S 在 Y 上的提升 $S \uparrow Y$ 就是 $[Y]^\omega$ 上的荟萃子集.

简而言之, 子集合上的无界闭子集之提升依旧为无界闭子集; 覆盖集合上的无界闭子集的降落依旧在无界闭子集滤子之中; 子集合上的荟萃子集的提升还是荟萃子集; 覆盖集合上的荟萃子集之降落也还是荟萃子集. 所以, 提升与降落保持无界闭子集性质, 也因而就保持荟萃子集性质.

证明　我们把 (1) 的证明留作练习. 现在来证明 (2). 而对于 (2), 只需证明第一个结论, 因为第二个结论由第一个结论给出. 设 C 是 $[Y]^\omega$ 的一个无界闭子集. 根据定理 2.34, 令 $f : [Y]^{<\omega} \to Y$ 满足 $C_f \subseteq C$.

对于 $e \in [Y]^{<\omega}$, 令

$$G(e) = \bigcap \left\{ A \in [Y]^\omega \mid e \subset A \wedge f\left[[A]^{<\omega}\right] \subseteq A \right\}.$$

即 $G(e)$ 为 e 在 f 下的闭包. 这是一个可数集合. 所以 $G : [Y]^{<\omega} \to [Y]^\omega$. 根据引理 2.14,

$$D_G = \left\{ A \in [Y]^\omega \mid \forall e \in [A]^{<\omega} \left(G(e) \subseteq A\right) \right\}$$

是 $[Y]^\omega$ 上的一个无界闭子集, 并且 $D_G \subseteq C_f$. 令

$$D = \left\{ A \in [X]^\omega \mid \forall e \in [A]^{<\omega} \left(G(e) \cap X \subseteq A\right) \right\}.$$

那么, D 是 $[X]^\omega$ 上的一个无界闭子集. 因为, 对于 $A\in D$, 令 B 为 A 在 f 下的闭包. 那么, $B\in D_G$, 并且 $B\cap X=A$. 于是, $A\in D_G\downarrow X$. 从而 $D\subseteq C\downarrow X$. □

理想 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 空间

前面我们专门分析了理想 $\mathfrak{P}_{\omega_1}(A)$ 上的无界闭子集和荟萃子集. 我们自然没有理由到 ω_1 上打住. 设 κ 为任意一个不可数的正则基数. 对于任意的基数 $\lambda\geqslant\kappa$, 我们很自然就有一个 λ 上的理想

$$\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)=\{X\subset\lambda\mid |X|<\kappa\}.$$

这是一个具备 κ-可加性的理想: 如果 $\langle X_\alpha\mid\alpha<\theta\rangle$ 是 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 上的一个长度为 $\theta<\kappa$ 的序列, 那么 $\left(\sum_{\alpha<\theta}X_\alpha\right)\in\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$. 当然, 当 $\kappa=\omega_1$ 时, 我们就回到前面第 172 页开始讨论的情形之中. 所以, 我们在这里真正感兴趣的是当 $\kappa>\omega_1$ 的情形, 尽管我们并不需要这样明确.

定义 2.28 (a) 一个集合 $X\subseteq\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 在 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 中是**无界**的当且仅当

$$\forall a\in\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)\ \exists b\in X\ (a\subseteq b).$$

(b) 一个集合 $X\subseteq\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 在 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 中是**闭**的当且仅当对于任意的 $\alpha<\kappa$, 对于任意的 $f\in X^\alpha$, 如果 f 是单调递增的, 即

$$\forall\gamma<\eta<\alpha\ (f(\gamma)\subseteq f(\eta)),$$

那么 $(\bigcup\mathrm{rng}(f))\in X$.

(c) 一个集合 $C\subseteq\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 在 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 中是**无界闭子集**当且仅当它既是无界的又是闭的.

(d) 一个集合 $T\subseteq\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 是 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 的一个**荟萃子集**当且仅当它与 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 的每一个无界闭子集 C 都有非空交.

(e) $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 上的无界闭子集滤子由它的全体无界闭子集所生成:

$$\mathscr{F}(\kappa,\lambda)=\{X\subseteq\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)\mid\exists C\subseteq X\ (C\text{ 是 }\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)\text{ 的一个无界闭子集})\}.$$

我们可以应用等势映射将无界闭子集滤子拓展到任意势为 λ 的集合 A 上, 也可以直接在定义 2.28 中用 A 取代 λ, 因为整个定义中我们丝毫没有用到 λ 是一个基数这一事实. 我们只是利用了 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 是一个 κ-可加的理想这一事实. 这一点对 $\mathfrak{P}_\kappa(A)$ 来说也是成立的. 无论如何, 当 κ 是一个不可数的正则基数以及 $|A|\geqslant\kappa$ 时, 在理想 $\mathfrak{P}_\kappa(A)$ 上就有无界闭子集和荟萃集之概念以及它上面的无界闭子集滤子 $\mathscr{F}(\kappa,A)$; 并且当 $|A|=|B|=\lambda$ 时, 三个理想 $\mathfrak{P}_\kappa(A)$, $\mathfrak{P}_\kappa(B)$ 以及 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 彼此同

构, 从而它们之上的无界闭子集滤子完全同构. 也正是基于这样的理由, 我们只关注 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 以及 $\mathscr{F}(\kappa,\lambda)$.

定义 2.28 是定义在不可数正则基数 κ 上的无界闭子集、荟萃子集以及无界闭子集滤子的自然推广. 当 $\lambda=\kappa$ 时, $\kappa\subset\mathfrak{P}_\kappa(\kappa)$ 是 $\mathfrak{P}_\kappa(\kappa)$ 的一个无界闭子集. 所以 $\mathscr{F}(\kappa,\kappa)$ 就完全有 κ 上的无界闭子集所生成; 而 κ 上的序关系 $<$ 也与子集关系 $\subset$ 在 κ 上完全重合. 这便是何以由原来的 $<$ 单调递增序列变成了 $\subset$ 单调递增序列. 将不可数正则基数 κ 上的无界闭子集以及荟萃集概念推广到 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 上的工作由耶赫[10] 首先完成.

定理 2.36 (Jech) $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 上的无界闭子集滤子 $\mathscr{F}(\kappa,\lambda)$ 是 κ-完全的, 并且对于**主对角线交**是封闭的: 如果 $\langle C_\alpha \mid \alpha\in\lambda\rangle$ 是 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 上的一个长度为 λ 的无界闭子集序列, 那么它们的主对角线交

$$\Delta_{\alpha\in\lambda}C_\alpha=\left\{x\in\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)\;\middle|\;x\in\bigcap_{\alpha\in x}C_\alpha\right\}$$

也是 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 的一个无界闭子集.

证明 (a) 如果 C 和 D 是 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 的无界闭子集, 那么 $C\cap D$ 也是. 设 $x\in\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$. 递归地定义序列 x_n 如下: 令 $x\subset x_0\in C$, 以及 $x_0\subset x_1\in D$; 给定 $x_{2n+1}\in D$, 令 $x_{2n+1}\subset x_{2n+2}\in C$ 以及 $x_{2n+2}\subset x_{2n+3}\in D$. 最后令 $y=\bigcup\limits_{n<\omega}x_{2n}=\bigcup\limits_{n<\omega}x_{2n+1}$. 那么 $x\subset y\in C\cap D$. 这表明 $C\cap D$ 是无界的. 交集 $C\cap D$ 自然是闭子集.

(b) 设 $\langle C_\alpha\mid\alpha<\gamma\rangle$ 为一个长度为 $\gamma<\kappa$ 的无界闭子集序列. 我们对长度 γ 施归纳. 当 $\gamma=\beta+1$ 时, 应用归纳假设以及 (a) 即可. 设 γ 是一个极限序数, 并且有归纳假设对于小于 γ 的无界闭子集序列都成立. 令 $D_0=C_0$, 以及对于每一个 $0<\beta<\gamma$, 令

$$D_\beta=\bigcap_{\delta<\beta}C_\delta.$$

那么我们得到一个在 $\supset$ 关系之下单调递减的无界闭子集序列. 由于

$$\bigcap_{\alpha<\gamma}C_\alpha=\bigcap_{\alpha<\gamma}D_\alpha$$

自然是闭子集, 我们只需验证上面这个交集是无界子集. 给定 $x\in\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$. 递归地定义 $\langle x_\alpha\mid\alpha<\gamma\rangle$ 如下: 令 $x\subset x_0\in D_0$; 给定 $\alpha<\gamma$, 令 $\left(\bigcup\limits_{\beta<\alpha}x_\beta\right)\subset x_\alpha\in D_\alpha$. 这

10 Thomas Jech.

样我们得到一个严格单调递增的序列 $\langle x_\alpha \mid \alpha < \gamma \rangle$, 并且

$$\forall \beta < \alpha < \gamma \ (x_\alpha \in D_\beta).$$

因此, $\forall \alpha < \gamma \left(\bigcup_{\beta<\gamma} x_\beta = \left(\bigcup_{\alpha<\beta<\gamma} x_\beta \right) \in D_\alpha \right)$.

(c) 给定 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 上的无界闭子集序列 $\langle C_\alpha \mid \alpha \in \lambda \rangle$, 令

$$D = \Delta_{\alpha\in\lambda} C_\alpha = \left\{ x \in \mathfrak{P}_\kappa(\lambda) \;\middle|\; x \in \bigcap_{\alpha \in x} C_\alpha \right\}.$$

先证 D 是闭子集. 为此, 设 $\alpha < \kappa$ 以及

$$x_0 \subset x_1 \subset \cdots \subset x_\xi \subset \cdots \ (\xi < \alpha)$$

为 D 中的一个长度为 α 的单调递增序列. 令 $x = \bigcup_{\xi<\alpha} x_\xi$. 设 $\gamma \in x$. 我们需要验证 $x \in C_\gamma$. 令 $\xi < \alpha$ 满足 $\gamma \in x_\xi$. 于是, $\forall \xi \leqslant \beta < \alpha \ (\gamma \in x_\beta)$. 因此,

$$\forall \xi \leqslant \beta < \alpha \ (x_\beta \in C_\gamma),$$

从而 $x \in C_\gamma$.

再证 D 是无界的. 设 $x \in \mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 非空. 那么 $\bigcap_{\alpha \in x} C_\alpha$ 是一个无界闭子集 ($|x| < \kappa$), 令

$$x \subset x_0 \in \bigcap_{\alpha \in x} C_\alpha.$$

递归地, 给定 x_n, 令

$$x_n \subset x_{n+1} \in \bigcap_{\alpha \in x_n} C_\alpha.$$

这是可能的, 因为 $|x_n| < \kappa$, $\bigcap_{\alpha \in x_n} C_\alpha$ 是一个无界闭子集. 令

$$y = \bigcup_{n<\omega} x_n.$$

设 $\alpha \in y$. 令 $k < \omega$ 满足 $\alpha \in x_k$. 于是 $\forall n \geqslant k+1 \ (x_n \in C_\alpha)$, 从而 $y \in C_\alpha$. 所以 $y \in D$. □

推论 2.5 设 $T \subset \mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 为一个荟萃集并且 $\varnothing \notin T$. 那么 T 上的任何一个选择函数 f 都一定在 T 的某一个荟萃子集上是常值函数.

证明　假设不然. 设 (T, f) 是一对反例. 对于每一个 $\alpha < \lambda$, 集合

$$\{x \in T \mid f(x) = \alpha\}$$

是非荟萃子集, 于是令 C_α 为一个与它的交为空的无界闭子集. 令

$$D = \Delta_{\alpha<\lambda} C_\alpha$$

为它们的主对角线交. 根据定理 2.36, D 是一个无界闭子集. 因此, $D \cap T \neq \varnothing$. 令 $x \in D \cap T$. 令 $\alpha = f(x) \in x$. 于是 $x \in C_\alpha$. 可是根据 C_α 的定义, $f(x) \neq \alpha$. 这便是一个矛盾. □

命题 2.2　设 A 是一个势大于等于不可数正则基数 κ 的集合. 设 $f : [A]^{<\omega} \to A$, 令

$$D_f = \left\{ X \in \mathfrak{P}_\kappa(A) \mid \forall e \in [X]^{<\omega} \left(f(e) \in X\right) \right\}.$$

那么 D_f 是 $\mathfrak{P}_\kappa(A)$ 的一个无界闭子集 (称这样的 D_f 为 $\mathfrak{P}_\kappa(A)$ 的**强无界闭子集**).

证明　自然, D_f 是一个闭子集. 我们来验证它在 $\mathfrak{P}_\kappa(A)$ 中是无界的. 为此, 设 $X \in \mathfrak{P}_\kappa(A)$. 递归地定义 $\langle X_n \mid n < \omega \rangle$ 如下:

(i) $X_0 = X$;

(ii) $X_{n+1} = X_n \cup \{f(e) \mid e \in [X_n]^{<\omega}\}$.

令 $Y = \bigcup_{n<\omega} X_n$. 那么 $Y \in D_f$. □

下面的例子表明当正则基数 κ 是一个不可数正则基数 γ 的后继基数时, $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 上的无界闭子集滤子会聚集在 $[\lambda]^\gamma$ 之上. 这个例子还展示出在 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 上, 当 $\kappa > \omega_1$ 时, 强无界闭子集概念是比无界闭子集概念的确要强的概念; 它们仅仅在 $\kappa = \omega_1$ 时重合.

例 2.16　设 $\lambda = \omega_2$, $\kappa = \omega_2$. 那么 $C = \omega_2 - \omega_1$ 以及 $D = [\omega_2]^{\aleph_1}$ 都是 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 的无界闭子集, 从而 $[\omega_2]^{\aleph_0}$ 是 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 的一个非荟萃子集, 并且无界闭子集 C 和 D 都不包含 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 的任何强无界闭子集 D_f, 因为任何一个强无界闭子集 D_f 都会与 $[\omega_2]^{\aleph_0}$ 有非空交.

2.4　奇异基数假设分析

2.4.1　银杰定理

现在让我们应用非荟萃集理想来解决连续统函数的一个基本问题:

问题 2.6　连续统函数 $\kappa \mapsto 2^\kappa$ 在极限基数 λ 处的取值是否与它在比 λ 小的基数处的取值有关联?

银杰首先对这个问题给出了几乎是唯一的非常有趣的答案：具有不可数梯度的奇异基数不会是一般连续统假设的第一个反例. 下面的定理由银杰 1974 年所证明[11]. 银杰的证明应用泛型超幂方法 (我们将在第三卷第 2 章第 III.2.7.1 小节中专门讨论), 这里的证明是纯粹组合分析的. 相对于泛型超滤子方法, 这种纯粹组合分析证明便算得上 "初等" 的. 正因为这种初等性, 我们才可以在这里展现. 这个纯组合分析的证明是鲍姆嘎特勒和普睿柯瑞所提供的[12].

定理 2.37 (银杰定理 1) 设 $\aleph_\lambda$ 是梯度不可数的奇异基数, 如果

$$\forall \alpha < \lambda \ (2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}),$$

那么 $2^{\aleph_\lambda} = \aleph_{\lambda+1}$.

定理 2.38 (银杰定理 2) 如果奇异基数假设对于所有梯度为 ω 的奇异基数成立, 那么奇异基数假设对于所有的奇异基数都成立.

上述两个定理的证明都用到下述引理：

引理 2.15 设 κ 是一个梯度不可数的奇异基数. 假设对于所有严格小于 κ 的基数 $\lambda < \kappa$ 都有 $\lambda^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa$. 如果存在一个从 $\mathrm{cf}(\kappa)$ 到 κ 的单调连续并且在 κ 中无界的序列 $\langle \kappa_\alpha \mid \alpha < \mathrm{cf}(\kappa)\rangle$ 来见证如下事实：集合

$$\left\{\alpha < \mathrm{cf}(\alpha) \;\middle|\; \kappa_\alpha^{\mathrm{cf}(\kappa_\alpha)} = \kappa_\alpha^+ \right\}$$

是 $\mathrm{cf}(\kappa)$ 的一个荟萃子集, 那么 $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^+$.

我们先应用这个引理证明银杰的上述定理.

证明 (定理 2.37) 因为一般连续统假设在 κ 之下成立, 引理 2.15 的条件自然成立 (任何一个单调连续收敛于 κ 的长度为 $\mathrm{cf}(\kappa)$ 的序列都具有所要的性质), 所以有 $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^+$. 根据定理 2.11, $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}(\kappa)}$; 又因为一般连续统假设在 κ 之下成立, 所以 $2^{<\kappa} = \kappa$, 因此 $2^\kappa = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^+$. □

证明 (定理 2.38) 对极限基数的梯度的归纳法我们来证明：如果 $2^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa$, 那么 $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^+$. 定理的假设条件给出 $\mathrm{cf}(\kappa) = \omega$ 时的情形.

设 $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$, 并且 $2^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa$. 应用归纳假设以及定理 2.18 中的 (2) 的证明, 应用对基数 λ 的归纳法, 我们就有：对于任意基数 $\lambda < \kappa$ 必有 $\lambda^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa$.

现在设 $\langle \kappa_\alpha \mid \alpha < \mathrm{cf}(\kappa)\rangle$ 是一个从 $\mathrm{cf}(\kappa)$ 到 κ 的单调连续并且在 κ 中无界的序列, 令

$$S = \left\{\alpha < \mathrm{cf}(\kappa) \;\middle|\; \mathrm{cf}(\kappa_\alpha) = \omega \wedge 2^{\aleph_0} < \kappa_\alpha \right\}.$$

11 Jack Silver, On the singular cardinal problem, In "Proceedings of the International Congress of Mathematicians", Vancouver, B. C.,1974, Vol. 1, Canad. Math. Congress, Montreal, Que., 1975, pp. 265-268.

12 J. E. Baumgartner, K. L. Prikry, On a theorem of Silver, Discrete Math. 1976, 4(1): 17-21.

这是 $\mathrm{cf}(\kappa)$ 的一个荟萃子集. 根据定理的假设, 对于 $\alpha \in S$ 都有 $\kappa_\alpha^{\mathrm{cf}(\kappa_\alpha)} = \kappa_\alpha^+$, 这样引理 2.15 的条件得到实现. 根据引理 2.15, 就得到结论 $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^+$. □

现在我们开始讨论引理 2.15 的证明.

令 $\kappa = \mathrm{cf}(\lambda) > \omega$. 令 $g : \kappa \to \lambda$ 为一个连续单调递增收敛于 λ 的序数函数.

对于 $\alpha < \kappa$, 令 $A_\alpha = \mathfrak{P}(\omega_{g(\alpha)})$, 因而, $|A_\alpha| = \aleph_{g(\alpha)+1}$. 对于 $\alpha < \kappa$, 令

$$h_\alpha : \mathfrak{P}(\omega_{g(\alpha)}) \to B_\alpha = \omega_{g(\alpha)+1}$$

为一个双射.

对于 $X \subseteq \omega_\lambda$, 依据下面的等式定义 $f_X \in \prod_{\alpha<\kappa} B_\alpha$:

$$\forall \alpha < \kappa \ \left(f_X(\alpha) = h_\alpha \left(X \cap \omega_{g(\alpha)} \right) \in \omega_{g(\alpha)+1} \right).$$

如果 $X \neq Y$ 是 ω_λ 的两个子集, 那么 f_X 与 f_Y 模理想 $[\kappa]^{<\kappa}$ 几乎不相交. 于是,

$$F = \{ f_X \mid X \in \mathfrak{P}(\omega_\lambda) \} \subset \prod_{\alpha<\kappa} B_\alpha$$

是一个彼此模理想 $[\kappa]^{<\kappa}$ 几乎不相交函数之集合, 并且

$$|\mathfrak{P}(\omega_\lambda)| = |F|.$$

从而, 银杰定理的证明就归结为证明不等式：$|F| \leqslant \aleph_{\lambda+1}$. 这个不等式的证明将由下面的系列引理完成. 主要思路是在 F 上定义一个线性序 $<$, 然后验证定理 2.7 的假设条件, 从而得到所要的不等式.

引理 2.16　*设 $\{A_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ 是 κ 个非空集合, 并且对于每一个 $\alpha < \kappa$ 都有 $|A_\alpha| < \aleph_{g(\alpha)}$. 设*

$$F \subset \prod_{\alpha<\kappa} A_\alpha$$

为一个彼此模理想 $[\kappa]^{<\kappa}$ 几乎不相交的函数之集合. 那么, $|F| \leqslant \aleph_\lambda$.

证明　不妨假设每一个 $A_\alpha \subseteq \aleph_{g(\alpha)}$. 令 $C = \left\{ \alpha < \kappa \;\middle|\; 0 < \alpha = \bigcup \alpha \right\}$.

对于 $f \in F$ 以及 $\alpha \in C$, 令

$$f^*(\alpha) = \min(\{\beta < \kappa \mid f(\alpha) < \aleph_{g(\beta)}\}).$$

由于 α 以及 $g(\alpha)$ 都是极限序数, $f(\alpha) \in \aleph_{g(\alpha)}$, 函数 $C \ni \gamma \mapsto \aleph_{g(\gamma)}$ 连续单调递增收敛于 $\aleph_\lambda$, 一定

$$\exists \beta < \alpha \ f(\alpha) \in \aleph_{g(\beta)}.$$

因此, $\forall \alpha \in C\ (f^*(\alpha) < \alpha)$. 根据选择函数定理, f^* 必然在某个荟萃集合 $S \subset C$ 上取常值 $\beta < \kappa$. 于是,

$$f\upharpoonright_S: S \to \aleph_{g(\beta)}.$$

令 $\varphi(f) = f\upharpoonright_S$.

设 $f \neq h$ 为 F 中的两个函数. 由于 f 和 h 模理想 $[\kappa]^{<\kappa}$ 几乎不相交,

$$\varphi(f) \neq \varphi(h)\ .$$

这样, 我们得到一个单射

$$\varphi : F \to \bigcup_{\beta<\kappa} \bigcup_{S\in(\mathrm{NS}_\kappa)^+} \aleph_{g(\beta)}^S.$$

从而,

$$|F| \leqslant \left|\bigcup_{\beta<\kappa} \bigcup_{S\in(\mathrm{NS}_\kappa)^+} \aleph_{g(\beta)}^S\right| \leqslant 2^\kappa \cdot \sum_{\beta<\kappa} \aleph_{g(\beta)}^\kappa \leqslant \aleph_\lambda. \qquad \square$$

上述引理的证明, 事实上稍作修改之后便给出下述加强型引理:

引理 2.17 设 $\{A_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ 是 κ 个非空集合, 并且 $\{\alpha < \kappa \mid |A_\alpha| < \aleph_{g(\alpha)}\}$ 是 κ 上的一个荟萃集. 设

$$F \subset \prod_{\alpha<\kappa} A_\alpha$$

为一个彼此模理想 $[\kappa]^{<\kappa}$ 几乎不相交的函数之集合. 那么, $|F| \leqslant \aleph_\lambda$.

引理 2.18 设 $f : \kappa \to \aleph_\lambda$ 满足要求: $\forall \alpha < \kappa\ (f(\alpha) < \aleph_{g(\alpha)+1})$. 设 F 是定义在 κ 上的彼此模理想 $[\kappa]^{<\kappa}$ 几乎不相交的序数函数之集合. 令

$$F_f = \left\{ h \in F \;\middle|\; \exists T \in (\mathrm{NS}_\kappa)^+\ \forall \alpha \in T\ (h(\alpha) < f(\alpha)) \right\}.$$

那么, $|F_f| \leqslant \aleph_\lambda$.

证明 固定 κ 上的一个荟萃集 T. 令

$$G_T = \{h \in F \mid \forall \alpha \in T\ (h(\alpha) < f(\alpha))\}.$$

由于 $\forall \alpha \in \kappa\ (|f(\alpha)| \leqslant \aleph_{g(\alpha)})$, T 是一个荟萃集, 我们可以对 G_T 应用前面的引理. 因此, $|G_T| \leqslant \aleph_\lambda$. 从而,

$$|F_f| \leqslant 2^\kappa \cdot \aleph_\lambda = \aleph_\lambda. \qquad \square$$

最后, 我们来证明银杰定理证明中所需要的不等式.

引理 2.19 设 $\{A_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ 是 κ 个非空集合, 并且对于每一个 $\alpha < \kappa$ 都有 $|A_\alpha| \leqslant \aleph_{g(\alpha)+1}$. 设

$$F \subset \prod_{\alpha<\kappa} A_\alpha$$

为一个彼此模理想 $[\kappa]^{<\kappa}$ 几乎不相交的函数之集合. 那么, $|F| \leqslant \aleph_{\lambda+1}$.

证明 不妨设 $\forall \alpha < \kappa \left(A_\alpha \subseteq \omega_{g(\alpha)+1}\right)$. 设 $\mathscr{U} \supset \mathscr{C}_\kappa$ 为一个超滤子. 对于 $f, h \in F$, 定义

$$f < h \leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) < h(\alpha)\} \in \mathscr{U}.$$

我们断言 $<$ 是 F 上的一个线性序.

首先, $<$ 是 F 上的一个传递关系: 设 $f < h$ 以及 $h < j$. 令

$$A = \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) < h(\alpha)\} \text{ 以及 } B = \{\alpha < \kappa \mid h(\alpha) < j(\alpha)\}.$$

那么, $A \in \mathscr{U}$ 以及 $B \in \mathscr{U}$. 于是, $A \cap B \in \mathscr{U}$. 由此, $f < j$.

其次, $<$ 是 F 上的一个彼此可比较的关系: 设 $f \neq h$. 由 F 的性质, f 与 h 几乎不相交. 也就是说,

$$\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = h(\alpha)\} \in [\kappa]^{<\kappa}.$$

从而,

$$\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) \neq h(\alpha)\} \in \mathscr{U}.$$

因此, 或者

$$\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) < h(\alpha)\} \in \mathscr{U},$$

即 $f < h$, 或者

$$\{\alpha < \kappa \mid h(\alpha) < f(\alpha)\} \in \mathscr{U},$$

即 $h < f$.

由于 $\mathscr{C}_\kappa \subset \mathscr{U}$, $\mathscr{U}$ 中的每一个元素都是 κ 上的一个荟萃集. 对于 F 中的任意两个函数, 如果 $h < f$, 那么

$$h \in F_f = \left\{k \in F \;\middle|\; \exists T \in (\mathrm{NS}_\kappa)^+ \ \forall \alpha \in T \ (k(\alpha) < f(\alpha))\right\}.$$

根据前面的引理, 对于 $f \in F$, $|F_f| \leqslant \aleph_\lambda$. 由此,

$$\forall f \in F \ \ (|\{h \in F \mid h < f\}| \leqslant \aleph_\lambda).$$

根据定理 2.7, 我们得到 $|F| \leqslant \aleph_{\lambda+1}$. □

2.4.2 嘎尔文–海纳定理

受银杰定理 (定理 2.37) 的激励, 嘎尔文[13]和海纳[14]证明了下述嘎尔文–海纳定

13 Galvin.

14 Hajnal.

理[15]. 这个定理表明任何一个具有不可数梯度的奇异强极限基数的幂集合的势都会有一个确定的上界. 在这一小节里, 我们来证明这一定理.

定理 2.39(Galvin-Hajnal) 设 $\aleph_\alpha$ 是一个具有不可数梯度的奇异强极限基数. 令 $\gamma = \left(2^{|\alpha|}\right)^+$. 那么 $2^{\aleph_\alpha} < \aleph_\gamma$.

当然, 当 $\aleph_\alpha = \alpha$ 时, 这个定理相当于什么也没有说. 但是, 当 $\alpha < \aleph_\alpha$ 时, 这个定理给出了有趣的上界. 比如, 当 $\alpha = \omega_1$ 以及 $2^{\aleph_1} = \aleph_2$ 时, 该定理表明如果 $\aleph_{\omega_1}$ 是强极限基数, 那么 $2^{\aleph_{\omega_1}} < \aleph_{\omega_3}$.

在银杰定理的证明中, 我们考虑了模有界子集理想几乎处处不相交的函数族的大小估计. 在这里, 我们需要类似的估计. 不过这里将要用到一种新的工具. 这就是利用不可数正则基数上的无界闭集滤子给它们上面的函数赋予一个序数, 以有助于寻找某些特定的几乎处处无交的函数族的上界. 我们现在就来引进这种赋值.

定义 2.29 设 $\kappa \geqslant \omega_1$ 为一个正则基数.

(1) 对于 $f, g \in \kappa^\kappa$, 令

$$f < g \leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) \geqslant g(\alpha)\} \text{ 是一个非荟萃集合.}$$

(2) 设 $T \subset \kappa$ 是一个荟萃子集. 对于 $f, g \in \kappa^\kappa$, 令

$$f <_T g \leftrightarrow \{\alpha \in T \mid f(\alpha) \geqslant g(\alpha)\} \text{ 是一个非荟萃集合.}$$

对等的说法是 $f < g$ 当且仅当存在一个 κ 上的无界闭子集 C 以至于 $\forall \alpha \in C\,(f(\alpha) < g(\alpha))$. 这样就定义了 κ^κ 上的一个传递关系, 并且不存在严格单调递减的无穷序列

$$f_0 > f_1 > \cdots > f_n > f_{n+1} > \cdots$$

因为 κ 上的无界闭集滤子是 σ-完全的. 因此, 关系 $<$ 是一个有秩关系. 于是, 我们可以依此引进序数函数 $f : \kappa \to \kappa$ 的一种秩: 基于同样的理由, $<_T$ 也是有秩关系.

定义 2.30 设 $\kappa \geqslant \omega_1$ 为一个正则基数. 对于 $f : \kappa \to \kappa$, 定义 f 的**范数** $\|f\|$ 如下:

$$\|f\| = \sup\left\{\|g\| + 1 \mid g \in \kappa^\kappa \wedge g < f\right\},$$

其中, $\|f\| = 0$ 当且仅当 $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = 0\}$ 是一个荟萃集. 类似地, 也可以定义函数 f 相对于一个给定的荟萃子集 T 的范数 $\|f\|_T$.

关于这些范数我们有下述有用的事实:

引理 2.20 设 $\kappa \geqslant \omega_1$ 为一个正则基数. 那么对于任意的 $f \in \kappa^\kappa$ 都有

(1) 若 $S \subset T \subset \kappa$ 是两个荟萃子集, 则 $\|f\|_T \leqslant \|f\|_S$; 尤其是有 $\|f\| \leqslant \|f\|_S$;

15 F. Galvin and A. Hajnal, Inequalities for cardinal powers, Ann. of Math., 1975, 101(3): 491-498.

(2) 若 $S, T \subset \kappa$ 是两个荟萃子集, 则 $\|f\|_{S\cup T} = \min\{\|f\|_S, \|f\|_T\}$;

(3) 若 $T \subset \kappa$ 是一个荟萃子集, $X \subset \kappa$ 是一个非荟萃集, 则 $\|f\|_{X\cup T} = \|f\|_T$;

(4) 令 $I_f = \mathrm{NS}_\kappa \cup \{T \subset \kappa \mid \|f\| < \|f\|_T\}$, 则 I_f 是 κ 上的一个非平凡理想;

(5) 若 $\|f\|$ 是一个非零极限序数, 则

$$T = \{\alpha < \kappa \mid \exists \beta < \kappa\,(f(\alpha) = \beta + 1)\} \in I_f,$$

从而 $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha)\,$是一个极限序数$\} \notin I_f$;

(6) 若 $\|f\|$ 是一个后继序数, 则 $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha)\,$是一个后继序数$\} \notin I_f$.

证明　我们将 (1) 到 (4) 的证明留着练习.

(5) 设 $\|f\|$ 是一个非零极限序数, 并且

$$T = \{\alpha < \kappa \mid \exists \beta < \kappa\,(f(\alpha) = \beta + 1)\} \notin I_f.$$

对于 $\alpha \in T$, 令 $f(\alpha) = g(\alpha) + 1$; 对于 $\alpha \in (\kappa - T)$, 令 $g(\alpha) = f(\alpha)$. 于是,

$$\|f\| = \|f\|_T = \|g\|_T + 1.$$

这便是一个矛盾.

(6) 设 $\|f\|$ 是一个后继序数, 并且

$$T = \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha)\,\text{是一个极限序数}\} \notin I_f.$$

令 $g : \kappa \to \kappa$ 满足 $g < f$ 并且 $\|f\| = \|g\| + 1$. 令 $C \subset \kappa$ 为一个无界闭子集. 因为 T 是荟萃集, $C \cap T$ 也是. 对于 $\alpha \in C \cap T$, 令 $h(\alpha) = g(\alpha) + 1$; 对于 $\alpha \in (\kappa - (C \cap T))$, 令 $h(\alpha) = 0$. 那么在 $C \cap T$ 上, $g < h < f$. 于是,

$$\|g\|_{C\cap T} < \|h\|_{C\cap T} = \|g\|_{C\cap T} + 1 < \|f\|_{C\cap T} = \|g\|_{C\cap T} + 1.$$

这就是矛盾. □

现在我们开始证明嘎尔文–海纳定理. 我们从下面的引理开始. 为了减少记号的复杂性, 我们将考虑非常具体的 $\aleph_{\omega_1}$ 的情形. 这并不失去一般性.

引理 2.21　假设 $\forall \alpha < \omega_1\ \left(\aleph_\alpha^{\aleph_1} < \aleph_{\omega_1}\right)$. 设 $\varphi : \omega_1 \to \omega_1$. 设对于每一个 $\alpha < \omega_1$, A_α 是一个势不超过 $\aleph_{\alpha+\varphi(\alpha)}$ 的非空集合. 令

$$F \subset \prod_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$$

为一个模理想 $[\omega_1]^{<\aleph_1}$ 几乎处处不相交的函数集合. 那么 F 的势不会超过 $\aleph_{\omega_1+\|\varphi\|}$.

证明　我们不妨假设 $\forall \alpha < \omega_1\ \left(A_\alpha \subset \aleph_{\alpha+\varphi(\alpha)}\right)$.

我们对函数 $\varphi : \omega_1 \to \omega_1$ 的范数 $\|\varphi\|$ 施归纳.

设 $\|\varphi\| = 0$. 所要的结论恰好就是引理 2.17 的结论：令其中的 $\lambda = \kappa = \omega_1$ 以及令其中的 g 为 ω_1 上的恒等函数; 而 $\|\varphi\| = 0$ 正好意味着在一个荟萃子集上函数 φ 取 0 值.

设 $\|\varphi\| > 0$.

情形一 $\|\varphi\|$ 是一个非零极限序数. 令

$$T = \{\alpha < \omega_1 \mid \varphi(\alpha)\,\text{是一个非零极限序数}\}.$$

根据引理 2.20 之 (5), $T \notin I_\varphi$.

因为 $\forall f \in F\, \forall \alpha \in \omega_1\ \big(f(\alpha) \in \aleph_{\alpha+\varphi(\alpha)}\big)$, 所以, 固定一个 $f \in F$, 对于 $\alpha \in T$, $\exists \beta < \varphi(\alpha)\ \ (f(\alpha) \in \aleph_{\alpha+\beta})$; 于是, 令

$$\psi(\alpha) = \min\{\beta < \varphi(\alpha) \ \mid (f(\alpha) \in \aleph_{\alpha+\beta})\}\,;$$

对于其他的 $\alpha < \omega_1$, 则令 $\psi(\alpha) = \varphi(\alpha)$. 由于 $T \notin I_\varphi$, 我们有

$$\|\psi\| \leqslant \|\psi\|_T < \|\varphi\|_T = \|\varphi\|.$$

令

$$F_\psi = \left\{g \in F \ \middle|\ \forall \alpha < \omega_1\ \ \big(g(\alpha) < \aleph_{\alpha+\psi(\alpha)}\big)\right\},$$

那么 $f \in F_\psi$. 这样, 我们证明了下述等式：

$$F = \bigcup\{\,F_\psi \mid \|\psi\| < \|\varphi\|\}\,.$$

根据归纳假设, 对于任意的满足不等式 $\|\psi\| < \|\varphi\|$ 的函数 $\psi : \omega_1 \to \omega_1$ 都有

$$|F_\psi| \leqslant \aleph_{\omega_1+\|\psi\|} < \aleph_{\omega_1+\|\varphi\|};$$

而 $|\omega_1^{\omega_1}| = 2^{\aleph_1} < \aleph_{\omega_1}$. 因此 $|F| \leqslant \aleph_{\omega_1+\|\varphi\|}$.

情形二 $\|\varphi\|$ 是一个后继序数. 令 $\|\varphi\| = \gamma + 1$. 令

$$T = \{\alpha < \omega_1 \mid \varphi(\alpha)\,\text{是一个后继序数}\}.$$

根据引理 2.20 之 (6), $T \notin I_\varphi$.

对于 $f \in F$, 令

$$F_f = \{g \in F \ \mid \exists S \subset T\ \ (S \notin I_\varphi\ \wedge\ \forall \alpha \in S\,(g(\alpha) \leqslant f(\alpha)))\,\}\,;$$

以及对于 $S \subset T$, 如果 $S \notin I_\varphi$, 则令

$$F_{f,S} = \{g \in F \mid \forall \alpha \in S\,(g(\alpha) \leqslant f(\alpha))\}.$$

现在我们来证明：$\forall f \in F\ (|F_f| \leqslant \aleph_{\omega_1+\gamma})$.

固定 $f \in F$. 由于 $F_f = \bigcup\{F_{f,S} \mid S \subset T \wedge S \notin I_\varphi\}$, 我们只需证明如果 $S \subset T$ 并且 $S \notin I_\varphi$, 那么 $|F_{f,S}| \leqslant \aleph_{\omega_1+\gamma}$. 为此, 设 $S \subset T$ 并且 $S \notin I_\varphi$. 对于 $\alpha \in S$, 令 $\psi(\alpha)+1 = \varphi(\alpha)$; 对于 $\alpha \in (\omega_1 - S)$, 令 $\psi(\alpha) = \varphi(\alpha)$. 那么

$$\|\psi\| \leqslant \|\psi\|_S < \|\varphi\|_S = \|\varphi\| = \gamma + 1.$$

因此, $\|\psi\| = \gamma$.

对于 $\alpha < \omega_1$, 令 $B_\alpha = f(\alpha)+1$, 那么 $|B_\alpha| \leqslant \aleph_{\alpha+\psi(\alpha)}$. 因为

$$F_{f,S} \subset \prod_{\alpha<\omega_1} B_\alpha,$$

根据归纳假设, $|F_{f,S}| \leqslant \aleph_{\omega_1+\|\psi\|}$. 因此, $|F_f| \leqslant \aleph_{\omega_1+\gamma}$.

现在我们来证明 $|F| \leqslant \aleph_{\omega_1+\|\varphi\|}$. 为此, 我们来构造一个长度不超过 $\aleph_{\omega_1+\gamma+1}$ 的函数序列

$$\langle f_\xi \in F \mid \xi < \theta \rangle$$

以至于 $F = \bigcup\left\{ F_{f_\xi} \;\middle|\; \xi < \theta \right\}$.

给定 $\langle f_\nu \in F \mid \nu < \xi \rangle$, 欲得 f_ξ：如果

$$F - \left(\bigcup\{ F_{f_\nu} \mid \nu < \xi\}\right) \neq \varnothing,$$

就从中取出一个为 f_ξ; 否则, 停止构造. 假设 f_ξ 有定义, 那么对于 $\nu < \xi$, 必有

$$\{\alpha \in T \mid f_\xi(\alpha) \leqslant f_\nu(\alpha)\} \in I_\varphi,$$

从而 $f_\nu \in F_{f_\xi}$.

由于 $\left|F_{f_\xi}\right| \leqslant \aleph_{\omega_1+\gamma}$, 并且 $\{ f_\nu \mid \nu < \xi\} \subset F_{f_\xi}$, 所以如果 f_ξ 有定义, 必然就有 $\xi < \aleph_{\omega_1+\gamma+1}$. 因此, 上述构造必定在不超过 $\aleph_{\omega_1+\gamma+1}$ 步内停止.

这样, 存在一个长度为 $\theta \leqslant \aleph_{\omega_1+\gamma+1}$ 的函数序列

$$\langle f_\xi \in F \mid \xi < \theta \rangle$$

以至于 $F = \bigcup\left\{ F_{f_\xi} \;\middle|\; \xi < \theta \right\}$. 因此

$$|F| \leqslant \aleph_{\omega_1+\gamma+1} = \aleph_{\omega_1+\|\varphi\|}. \qquad \square$$

应用引理 2.21, 我们可以证明下述引理：

引理 2.22 假设 $\forall\alpha<\omega_1\left(\aleph_\alpha^{\aleph_1}<\aleph_{\omega_1}\right)$. 设对于每一个 $\alpha<\omega_1$, A_α 是一个势严格小于 $\aleph_{\omega_1}$ 的非空集合. 令

$$F\subset\prod_{\alpha<\omega_1}A_\alpha$$

为一个模理想 $[\omega_1]^{<\aleph_1}$ 几乎处处不相交的函数集合. 令 $\gamma=\left(2^{\aleph_1}\right)^+$. 那么 F 的势会严格小于 $\aleph_\gamma$.

证明 因为对于 $\alpha<\omega_1$ 必有 $|A_\alpha|<\aleph_{\omega_1}$, 故可令 $\varphi(\alpha)<\omega_1$ 来见证

$$|A_\alpha|\leqslant\aleph_{\alpha+\varphi(\alpha)}.$$

令 $\theta=\sup\{\|\psi\|+1\mid\psi\in\omega_1^{\omega_1}\}$, 那么, $\theta<\left(2^{\aleph_1}\right)^+$. 因此, 对于任何 $\psi:\omega_1\to\omega_1$ 必有 $\omega_1+\|\psi\|<\gamma=\left(2^{\aleph_1}\right)^+$. 根据引理 2.21, 就有

$$|F|\leqslant\aleph_{\omega_1+\|\varphi\|}<\aleph_\gamma.$$ □

证明 (定理 2.39) 应用引理 2.22, 以及如同银杰定理 (定理 2.37) 的证明那样就得到所要的结论. □

谢旯基数不等式定理

无论是银杰定理 (定理 2.37) 还是嘎尔文–海纳定理 (定理 2.39), 它们的证明之中都用到不可数正则基数上的两个典型理想：有界子集理想以及非荟萃子集理想. 可是在自然数集合之上只有有界子集理想, 而没有非荟萃子集理想. 这自然意味着有关具有可数梯度的强极限基数的幂集之势的界定问题的求解需要关注另外的可以利用的对象. 谢旯找到了一种方法来解开这种情形下的谜团：这就是考虑自然数集合上所有可能的超滤子以及由这些超滤子所给出的不可数的正则基数超积. 利用这些所有可能的超积, 应用模型理论与组合理论的有效结合, 谢旯建立起一套**共尾可能性**(pcf)[16]理论, 从而解决了诸如当 $\aleph_\omega$ 是强极限基数时 $2^{\aleph_\omega}$ 会有什么样的非平凡上界的问题.

因为所应用的分析工具 (模型理论) 到此为止尚未开发准备充分, 我们不得不推迟引进谢旯的共尾可能性理论. 谢旯的共尾可能性理论以及下述基数不等式定理将在本《导引》第二卷第 1 章第 II.1.3 节中详细给出. 在此, 我们仅仅展示下述谢旯定理作为对奇异基数的组合性分析的结尾.

定理 2.40 (谢旯定理) 如果 $\aleph_\omega$ 是一个强极限基数, 那么 $2^{\aleph_\omega}$ 是一个严格小于 $\aleph_{\omega_4}$ 的后继基数.

16 Possible Cofinalities.

2.5　树

在偏序结构中, 有一类偏序在集合论中占有引人注目的位置. 这就是树.

定义 2.31 (树)　(1) 一个偏序集合 $(T,<)$ 是一棵**树**当且仅当

(i) T 中有一个 $<$-最小元, 称为**树根**;

(ii) 如果 $x\in T$, 那么, $(\{y\in T\mid y<x\},<)$ 是一个秩序集.

(2) 树 $(T,<)$ 中的 T 的元素被称为树的**节点**; 若 $x<y$, 则称 x 是 y 的**前导**(节点), y 则被称为 x 的**后继**(节点); 若 $x<y$ 且开区间 $(x,y)=\{t\in T\mid x<t<y\}$ 为空集,, 则称 x 是 y 的**直接前导**, y 则被称为 x 的**直接后继**; 若 x 无任何后继, 则称 x 为一个**终结节点**; T 中的两个节点 x,y **不可比较**当且仅当

$$(\neg(x<y))\ \wedge\ (\neg(y<x)).$$

(3) 树 $(T,<)$ 中节点 x 的**高度**, $h_T(x)$, 为 x 的全体前导节点之集在 $<$ 下的序型, 即

$$h_T(x)=\mathrm{ot}(\{y\in T\mid y<x\},<).$$

若 $h_T(x)$ 是一个后继序数, 则称 x 为一个**后继节点**; 若 $h_T(x)$ 是一个极限序数, 则称 x 为一个**极限节点**.

(4) 树 $(T,<)$ 的**第α-层**, $T_\alpha=\{x\in T\mid h_T(x)=\alpha\}$; 树 $(T,<)$ 的**高度**,

$$\mathrm{ht}(T)=\min(\{\alpha\mid T_\alpha=\varnothing\})\ .$$

(5) 树 $(T,<)$ 上的一根**树枝** b 是 T 的在 $<$ 下的极大秩序子集; 树枝 b 的**长度**,

$$\ell(b)=\mathrm{ot}(b,<)\leqslant\mathrm{ht}(T)\ ;$$

如果 $\ell(b)=\mathrm{ht}(T)$, 则称 b 为树 $(T,<)$ 的一根**等高树枝**.

(6) 对于树 $(T,<)$ 而言, 如果 $\alpha\leqslant\mathrm{ht}(T)$, 令

$$T\restriction_\alpha=\bigcup_{\beta<\alpha}T_\beta,$$

称树 $(T\restriction_\alpha,<)$ 为树 $(T,<)$ 的高度为 α 的**截断子树**.

(7) T 的一个子集 $T'\subset T$ 是树 $(T,<)$ 的一棵**子树**当且仅当

$$\forall x\in T'\ \forall y\in T\ (y<x\to y\in T').$$

也就是说, T' 包含着它的任何一个元素在 T 中的全部前导.

(8) T 的一个子集合 $A \subset T$ 是树 $(T,<)$ 的一条**反链**当且仅当 A 中的任何两个不同的元素在偏序 $<$ 之下都不可比较; 树 $(T,<)$ 的一条反链 A 是一条**极大反链**当且仅当 T 中的任何一个节点都一定和 A 中的某一个元素可比较, 即或者在 A 中, 或者是 A 中某个元素的前导, 或者是 A 中的某个元素的后继.

例 2.17 (1) 如果 $(W,<)$ 是一个秩序集, 那么 $(W,<)$ 是一棵树.

(2) 设 A 是一个非空集合, λ 是一个序数, 对于 $f,g \in T = A^{<\lambda} = \bigcup_{\alpha<\lambda} A^{\alpha}$, 定义

$$f < g \leftrightarrow \mathrm{dom}(f) < \mathrm{dom}(g) \wedge f \subset g,$$

那么, $(A^{<\lambda},<)$ 是一个树, 并且

(a) $\mathrm{ht}(A^{<\lambda}) = \lambda$;

(b) $\forall \alpha < \lambda\, (T_{\alpha} = A^{\alpha}$ 并且 T_{α} 是 T 的一条极大反链);

(c) $\forall \alpha \leqslant \lambda\, (T\restriction_{\alpha} = A^{<\alpha})$;

(d) $b \subset A^{<\lambda}$ 是 $(T,<)$ 的一根树枝当且仅当 $\bigcup b \in A^{\lambda}$.

(3) 令 $T = \{f \in \mathbb{N}^{<\omega} \mid \forall i < j < \mathrm{dom}(f)\ (f(i) > f(j))\}$. 那么, 作为树 $(\mathbb{N}^{<\omega},<)$ 的一棵子树, 其高度为 ω, 但是 $(T,<)$ 没有等高树枝.

2.5.1 树特性

定理 2.41 (柯尼希引理) ω 上的有限分叉树必有等高树枝. 也就是说, 如果 $(T,<)$ 是一个高度为 ω 的树, 并且对于树中的每一个节点 $x \in T$ 而言, x 的直接后继节点之集合必是一个有限集合 (**有限分叉**), 那么 $(T,<)$ 必有一根长度为 ω 的树枝.

证明 设 $(T,<)$ 是一棵高度为 ω 的有限分叉树. 对于 $x \in T$, 令

$$S(x) = \{y \in T \mid x < y\ \wedge\ (x,y)_< = \varnothing\}$$

为 x 的直接后继节点的集合. 这些都是有限集合.

令 c 为 $\mathfrak{P}(T)$ 上的一个选择函数. 定义 $g : T \times \omega \to T$ 如下:

$$g(x,n) = c(\{y \in S(x) \mid y \text{ 的后继之集合 } \{z \in T \mid y < z\} \text{ 是一个无穷集合}\}).$$

令 b_0 为 $(T,<)$ 的树根.

归纳地, 假设 $b_n \in T$ 已经定义, 并且 $\{y \in T \mid b_n < y\}$ 是一个无穷集合. 令 $b_{n+1} = g(b_n,n)$. 那么, $b_n < b_{n+1} \in T$. 这是因为

$$\{y \in T \mid b_n < y\} = \bigcup_{b \in S(b_n)} \{y \in T \mid b = y\ \vee\ b < y\},$$

从而, 集合 $\{b \in S(b_n) \mid b$的后继之集合$\{z \in T \mid b < z\}$是一个无穷集合$\}$ 是一个非空集合.

令 $B = \{y \in T \mid \exists n < \omega\,(y = b_n \vee y < b_n)\}$. 那么, B 是 $(T, <)$ 的等高树枝. □

推论 2.6　如果 $T \subset 2^{<\omega}$ 是一棵高度为 ω 的 (二叉) 树, 那么 T 必有一根长度为 ω 的树枝.

上面的柯尼希定理诱发出下述问题:

问题 2.7　如果 $\kappa > \omega$ 是一个正则基数, $(T, <)$ 是一棵高度为 κ 的树, 并且 $(T, <)$ 的每一层 T_α 之势都小于 κ, $(T, <)$ 是否一定有一根等高树枝?

定义 2.32　称一个正则基数 κ 具有**树特性**当且仅当如果 $(T, <)$ 是一棵高度为 κ 的树, 并且 $(T, <)$ 的每一层 T_α 之势都小于 κ, 那么 $(T, <)$ 一定有一根等高树枝.

定义 2.33　一棵树 $(T, <)$ 是一棵**怪树**(阿朗谢[17]树) 当且仅当

$$\mathrm{ht}(T) = \omega_1, \quad \forall \alpha < \omega_1\,(|T_\alpha| \leqslant \omega),$$

但是, $(T, <)$ 没有等高树枝.

定理 2.42　ω_1 不具有树特性. 也就是说, 存在一棵怪树.

证明　递归地构造树 $(\omega^{<\omega_1}, <)$ 的一棵子树 $(T, <)$ 的层次序列 $\langle T_\alpha \mid \alpha < \omega_1\rangle$ 以期每一层 T_α 都满足下述要求:

(a) $T_\alpha \subset \omega^\alpha$, $|T_\alpha| \leqslant \aleph_0$;

(b) 如果 $f \in T_\alpha$, 那么, f 是一个单射, 并且 $\omega - \mathrm{rng}(f)$ 是一个无穷集合;

(c) 如果 $f \in T_\alpha$, 以及 $\beta < \alpha$, 那么, $f\restriction_\beta \in T_\beta$;

(d) $\forall \beta < \alpha\, \forall g \in T_\beta\, \forall X \in [\omega - \mathrm{rng}(g)]^{<\omega}\, \exists f \in T_\alpha\, (g \subset f \;\wedge\; X \cap \mathrm{rng}(f) = \varnothing)$.

$T_0 = \{\varnothing\}$.

设 $\alpha = \gamma + 1 < \omega_1$ 以及 T_γ 已经有定义, 并且条件 (a) 至 (d) 都被 T_γ 所满足. 定义

$$T_\alpha = T_{\gamma+1} = \{g \cup \{(\gamma, n)\} \mid g \in T_\gamma \;\wedge\; n \in (\omega - \mathrm{rng}(g))\}.$$

这样, T_α 满足条件 (a) 至 (d).

设 $0 < \alpha < \omega_1$ 是一个极限序数以及 $\forall \gamma < \alpha\, T_\gamma$ 已经有定义, 并且条件 (a) 至 (d) 都被所有的 T_γ 所满足.

任意固定 $\gamma < \alpha$, $g \in T_\gamma$, $X \in [\omega - \mathrm{rng}(g)]^{<\omega}$, 我们递归地构造 $f = f(g, X)$:

令 $\langle \alpha_n \mid n < \omega\rangle$ 是一个单调递增收敛于 α 的序列, 并且 $\alpha_0 = \gamma$.

令 $f_0 = g \in T_{\alpha_0}$ 以及 $X_0 = X \in [\omega - \mathrm{rng}(f_0)]^{<\omega}$.

17 Aronszajn.

假设 $f_n \in T_{\alpha_n}$ 以及 $X_n \in [\omega - \mathrm{rng}(f_n)]^{<\omega}$ 已经被定义. 先取

$$X_n \subset X_{n+1} \in [\omega - \mathrm{rng}(f_n)]^{<\omega};$$

再根据条件 (d), 取 $f_{n+1} \in T_{\alpha_{n+1}}$ 满足

$$f_n \subset f_{n+1} \wedge X_{n+1} \cap \mathrm{rng}(f_{n+1}) = \varnothing.$$

令 $f = \bigcup_{n<\omega} f_n$. 那么,

(i) $f : \alpha \to \omega$ 是一个单射;

(ii) $X \cap \mathrm{rng}(f) = \left(\bigcup_{n<\omega} X_n\right) \cap \mathrm{rng}(f) = \varnothing$, 从而 $|\omega - \mathrm{rng}(f)| = \aleph_0$;

(iii) $\forall \beta < \alpha\, (f \restriction_\beta \in T_\beta)$.

定义

$$T_\alpha = \left\{ f(g, X) \;\middle|\; g \in \bigcup_{\beta<\alpha} T_\beta \wedge X \in [\omega - \mathrm{rng}(g)]^{<\omega} \right\}.$$

由此, (a) 和 (d) 被 T_α 所满足; 而依据 $f \in T_\alpha$ 之定义, (b) 和 (c) 被满足.

这样, 我们递归地定义了一个满足条件 (a) 至 (d) 的层次序列 $\langle T_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$. 令

$$T = \bigcup_{\alpha<\omega_1} T_\alpha \wedge \forall f, g \in T\, (f < g \leftrightarrow f \subset g).$$

树 $(T, <)$ 是一棵怪树: 其高度为 ω_1; 每一层 T_α 可数; 如果 $B \subset T$ 是一根树枝, 那么

$$\bigcup B : \mathrm{dom}\left(\bigcup B\right) \to \omega$$

是一个单射, 所以 B 的长度 $\ell(B) < \omega_1$. □

2.5.2 苏斯林树

定义 2.34 一棵树 $(T, <)$ 是一棵**苏斯林树**当且仅当 $\mathrm{ht}(T) = \omega_1$, $(T, <)$ 既没有不可数的反链, 也没有等高树枝.

每一棵苏斯林树都是一棵怪树, 但反之未必.

定义 2.35 对于 $\alpha \leqslant \omega_1$, 一个高度为 α 的树 $(T, <)$ 是一棵**规范树**当且仅当

(1) 每一层 T_β 之势必可数;

(2) 如果 $x \in T$, 那么 x 在 T 中必有可数无穷多个直接后继;

(3) 如果 $h_T(x) < \beta < \alpha$, 那么 $\exists y \in T_\beta\, (x < y)$;

(4) 如果 $\beta < \alpha$ 是一个极限序数, $\{x, y\} \subset T_\beta$, 并且

$$\{z \in T \mid z < x\} = \{z \in T \mid z < y\},$$

那么 $x=y$.

定理 2.43　*如果钻石原理成立, 那么存在一棵规范苏斯林树.*

证明　设 $\langle S_\alpha \mid \alpha\in\omega_1\rangle$ 是一个钻石序列.

$\gamma_1=1\wedge <_1=\{\varnothing\}\wedge T\restriction_1=\gamma_1$.

设 $\alpha<\omega_1$ 是一个极限序数, 并且对于 $\beta<\alpha$, $(T\restriction_\beta,<_\beta)$ 已经定义好, 并且 $T\restriction_\beta$ 是一个可数序数 γ_β. 令

$$T\restriction_\alpha=\bigcup_{\beta<\alpha}T\restriction_\beta\ \wedge\ <_\alpha=\bigcup_{\beta<\alpha}<_\beta .$$

如果 S_α 是 $(T\restriction_\alpha,<_\alpha)$ 的一条极大反链, 那么, 对于每一个 $t\in T\restriction_\alpha$, 令 $a_t\in S_\alpha$ 为一个与 t 可比较的在 $\in$-关系下的最小节点 $(t<_T a_t\vee t=a_t\vee a_t<_T t)$, 以及令 $b_t\subset T\restriction_\alpha$ 为包含 t 和 a_t 两个节点的长度为 α 的树枝. 令 $A_\alpha=\{b_t\mid t\in T\restriction_\alpha\}$. 这是一个可数无穷集合. 令 $\gamma_\alpha=T\restriction_\alpha$ 以及 $A_\alpha=\{b_n\mid n<\omega\}$. 定义

$$<_{\alpha+1}\restriction_{(T\restriction_\alpha)}=<_\alpha\ \wedge\forall t\in T\restriction_\alpha\ \forall n\in\omega\ \left((t<_{\alpha+1}\gamma_\alpha+n)\leftrightarrow t\in b_n\right).$$

那么, $T_\alpha=\{\gamma_\alpha+n\mid n<\omega\}$, $T\restriction_{\alpha+1}=\gamma_\alpha+\omega$.

这样, $(T\restriction_{\alpha+1},<_{\alpha+1})$ 依旧是一棵规范树; S_α 依旧是 $(T\restriction_{\alpha+1},<_{\alpha+1})$ 的一条极大反链, 因为 T_α 中的每一个节点都可以和 S_α 中的唯一的节点可比较.

如果 S_α 不是 $(T\restriction_\alpha,<_\alpha)$ 的一条极大反链, 那么, 任选 $T\restriction_\alpha$ 的可数根长度为 α 的树枝覆盖 $T\restriction_\alpha$, 将它们收集成 $A_\alpha=\{b_n\mid n<\omega\}$. 定义

$$<_{\alpha+1}\restriction_{(T\restriction_\alpha)}=<_\alpha\ \wedge\forall t\in T\restriction_\alpha\ \forall n\in\omega\ (t<_{\alpha+1}\gamma_\alpha+n\leftrightarrow t\in b_n).$$

那么, $T_\alpha=\{\gamma_\alpha+n\mid n<\omega\}$, $T\restriction_{\alpha+1}=\gamma_\alpha+\omega$, $(T\restriction_{\alpha+1},<_{\alpha+1})$ 依旧是一棵规范树.

设 $\alpha=\beta+1$. 令 $\gamma_\alpha=T\restriction_\alpha$, $A_\alpha=T_\beta=\{\beta_n\mid n<\omega\}$,

$$T_\alpha=\{\gamma_\alpha+n\mid n<\omega\}\wedge\ <_{\alpha+1}\restriction_{(T\restriction_\alpha)}=<_\beta\ \wedge\forall n<\omega\ (\beta_n<_{\alpha+1}\gamma_\alpha+n).$$

那么, $(T\restriction_{\alpha+1},<_{\alpha+1})$ 还是一棵规范树.

最后, 令 $<_T=\bigcup_{\alpha<\omega_1}<_\alpha$. 那么, $(\omega_1,<_T)$ 是一棵规范苏斯林树.

首先, 我们注意到这样一个事实: 如果 $(T,<_T)$ 有一根长度为 ω_1 的树枝, 那么它必有一条不可数反链. 假设 B 是一根长为 ω_1 的树枝. 对于 $\alpha<\omega_1$, 令 $t_\alpha\in B\cap T_\alpha$ 以及

$$\tau_\alpha\in\left(\{t\in T_{\alpha+1}\mid t_\alpha<t\}-B\right).$$

那么, $\{\tau_\alpha\mid\alpha<\omega_1\}$ 就是一条不可数的反链.

我们来证明此树没有不可数的反链. 假设 $A \subset \omega_1$ 是在 $<_T$ 下的一条极大反链, 令

$$C = \{\alpha < \omega_1 \mid A \cap T\restriction_\alpha \text{ 是 } (T\restriction_\alpha, <_\alpha) \text{ 的一条极大反链}\}$$

以及

$$D = \{\alpha < \omega_1 \mid \alpha = T\restriction_\alpha\}.$$

断言　C 和 D 都是 ω_1 的无界闭集.

据此断言, 令 $\alpha \in C \cap D$ 见证 $S_\alpha = A \cap \alpha$. 那么, 对于 $\gamma > \alpha$, S_α 依旧是 $T\restriction_\gamma$ 的一条极大反链. 因此, $A = S_\alpha$. 所以, A 可数.

剩下的事情是证明上述断言. 我们先证明 C 在 ω_1 中无界闭集. 为此, 只需证明它是无界的.

假设 $\alpha_0 < \omega_1$ 任意给定. 树 $T\restriction_{\alpha_0}$ 可数, 令 $\alpha_1 > \alpha_0$ 满足要求:

$$\forall t \in T\restriction_{\alpha_0}\ \exists a \in A \cap T\restriction_{\alpha_1}\ (t \text{ 与 } a \text{ 可比较}).$$

递归地, 令 $\alpha_{n+1} > \alpha_n$ 满足要求:

$$\forall t \in T\restriction_{\alpha_n}\ \exists a \in A \cap T\restriction_{\alpha_{n+1}}\ (t \text{ 与 } a \text{ 可比较}).$$

令 $\alpha = \sup(\{\alpha_n \mid n < \omega\})$. 那么, $A \cap T\restriction_\alpha$ 就是 $T\restriction_\alpha$ 的一条极大反链.

D 之所以是无界闭集, 是因为函数 $\gamma \mapsto T\restriction_\gamma$ 是一个单增函数; 等式 $\alpha = T\restriction_\alpha$ 成立当且仅当 $\forall \gamma < \alpha\, (T\restriction_\gamma < \alpha)$. □

2.5.3　马丁公理

定义 2.36　设 $(P, <)$ 是一个偏序集. 称 $D \subset P$ 为 P 的一个**稠密子集**当且仅当 $\forall p \in P\, \exists q \in D\, (p \leqslant q)$. 对于 $(P, <)$ 的稠密子集的一个非空集合 $\mathscr{C}$ 而言, 称 $F \subset P$ 是 $(P, <)$ 的一个 **$\mathscr{C}$-泛善子集** 当且仅当

(1) $\forall p_1, p_2 \in F\, \exists q \in F\, (p_1 \leqslant q \wedge p_2 \leqslant q)$;

(2) $\forall p \in F\, \forall q \in P\, (q \leqslant p \to q \in F)$;

(3) $\forall D \in \mathscr{C}\, \exists p\, (p \in F \cap D)$.

例 2.18　设 $(P, <) = (\omega^{<\omega}, <)$. 对于每一个正整数 n, 令

$$D_n = \{t \in P \mid \mathrm{dom}(t) > n\},$$

那么, D_n 是 $(P, <)$ 的一个稠密子集. 令 $\mathscr{C} = \{D_n \mid 0 < n < \omega\}$. 那么, $F \subset P$ 是一个 $\mathscr{C}$-泛善子集当且仅当 F 是树 $(P, <)$ 的一根等高树枝.

定理 2.44　设 $(P, <)$ 是一个偏序集. 如果 $\mathscr{C}$ 是 $(P, <)$ 的稠密子集的一个非空可数集合, 那么对于任意的 $p \in P$, 一定存在一个 $\mathscr{C}$-泛善子集 $F \ni p$.

证明　设 $\mathscr{C} = \{D_n \mid n < \omega\}$ 为 $(P, <)$ 的稠密子集的一个可数集合. 固定 P 的一个秩序 $\prec$.

令 $p_0 = p$. 归纳地定义 p_{n+1} 为满足不等式 $p_n \leqslant q \in D_n$ 的 D_n 中 $\prec$-最小元素. 最后令 $F = \{p \in P \mid \exists n < \omega\, (p \leqslant p_n)\}$. 那么, F 就是一个 $\mathscr{C}$-泛善子集. □

推论 2.7　如果 $(T, <)$ 是一棵高度为 ω 的有限分叉树, 那么树 $(T, <)$ 一定有一根等高树枝.

证明　给定高度为 ω 有限分叉树 $(T, <)$. 令

$$T' = \{t \in T \mid |\{s \in T \mid t < s\}| = \aleph_0\}.$$

那么, $(T', <)$ 是一棵高度为 ω 的有限分叉树, 并且

$$\forall t \in T'\, \forall n < \omega\, \exists m < \omega\, (m > \mathrm{ht}(t) \wedge m > n \wedge \exists s \in T'_n\, (t < s))\ .$$

对于自然数 $n \in \omega$, 令 $D_n = \{t \in T' \mid \mathrm{ht}(t) > n\}$. 那么, D_n 在 $(T', <)$ 中是一个稠密子集. 令

$$\mathscr{C} = \{D_n \mid n < \omega\}.$$

对于任意 $t \in T'$, 根据上面的存在性定理, $(T', <)$ 有一个 $\mathscr{C}$-泛善子集 $F \ni t$. 此 F 便是 $(T, <)$ 的长度为 ω 的树枝. □

推论 2.8　如果 $\mathscr{C}$ 是实数轴的可数个稠密开集之集合, 那么 $\bigcap \mathscr{C}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个稠密子集.

证明　设 $\mathscr{C}$ 是实数轴的可数个稠密开集之集合. 设 (a, b) 是一个开区间. 令

$$P = \{[c, d] \mid c < d \wedge [c, d] \subset (a, b)\}.$$

对于 $[c_1, d_1], [c_2, d_2] \in P$, 定义 $[c_1, d_1] < [c_2, d_2]$ 当且仅当 $[c_1, d_1] \supset [c_2, d_2]$.

对于任何一个稠密开集 $A \subseteq \mathbb{R}$, 令

$$D_A = \{[c, d] \in P \mid [c, d] \subset A\}.$$

那么, D_A 是 $(P, <)$ 的一个稠密子集.

令 $\mathscr{D} = \{D_A \mid A \in \mathscr{C}\}$, 那么, $\mathscr{D}$ 是 $(P, <)$ 的稠密子集的一个可数集合. 根据上面的定理, 令 $F \subset P$ 为一个 $\mathscr{D}$-泛善子集, 那么, F 是一个具有有限交性质的非空的有界闭区间的集合. 根据实数轴的紧致性 (参见定理 3.16), $\bigcap F$ 一定非空. 从而,

$$(a, b) \cap \left(\bigcap \mathscr{C}\right) \supset \left(\bigcap F\right)$$

也非空. 所以, $\bigcap \mathscr{C}$ 是稠密的. □

问题 2.8 如果给定的稠密子集的集合 $\mathscr{C}$ 之势为 $\aleph_1$, 是否还一定有一个 $\mathscr{C}$-泛善子集?

这个问题的答案显然是否定的: 因为怪树存在. 我们再看一个例子:

例 2.19 考虑树 $(T,<)=(\omega_1^{<\omega},<)$. 对于 $\alpha<\omega_1$, 令

$$D_\alpha=\{f\in T\mid \alpha\in \mathrm{rng}(f)\},$$

这是 $(T,<)$ 的一个稠密子集. 因为, 给定 $f\in T$, 令 $g=f\cup\{(\mathrm{dom}(f),\alpha)\}$. 那么, $f<g\in D_\alpha$.

如果 $F\subset T$ 是一个 $\mathscr{C}$-泛善子集, 那么, $g=\bigcup F$ 是一个从 ω 的一个子集到 ω_1 的映射. 因为 $\mathrm{rng}(g)$ 是一个可数集合, 令 $\gamma\in\omega_1-\mathrm{rng}(g)$, 那么 $F\cap D_\gamma=\varnothing$.

上面的两个例子都有一个共同的特点: 所论偏序集有不可数的反链.

定义 2.37 称偏序集 $(P,<)$ 中的两个不同的元素 p 和 q 是**彼此相容**的当且仅当 $\exists r\in P\,(p\leqslant r\ \wedge\ q\leqslant r)$; 它们是**彼此不相容**的当且仅当它们并非彼此相容, 即 $(\neg(\exists r\in P\,(p\leqslant r\ \wedge\ q\leqslant r)))$. (在一棵树上, 彼此相容与相互可比较是同一回事; 但一般而言, 相容未必可比较, 可比较一定相容.) 称一个偏序集 $(P,<)$ 的一个子集 A 是 $(P,<)$ 的一条**反链**当且仅当 A 中的任何两个不相同的元素都彼此不相容, 即

$$\forall p,q\in A\,(p\neq q\to(\neg(\exists r\in P\,(p\leqslant r\ \wedge\ q\leqslant r)))).$$

偏序集 $(P,<)$ 的子集 A 是一条**极大反链**当且仅当 A 是一条反链, 并且

$$\forall p\in P\,\exists q\in A\,\exists r\in P\,(p\leqslant r\ \wedge\ q\leqslant r).$$

称一个偏序集 $(P,<)$ 满足**可数反链条件**当且仅当 $(P,<)$ 的任何一条反链之势都小于等于 $\aleph_0$.

例 2.20 设 $\omega<\kappa$ 是一个基数. 令

$$P=\{f\mid \exists X\in[\kappa]^{<\omega}\,(f:X\to 2)\}.$$

对于 $f,g\in P$, 定义 $f<g\iff f\subset g$. 那么, $(P,<)$ 满足可数反链条件.

如同上面例子的证明一样, 在许多证明一个偏序集满足可数反链条件过程中, 下述**同根引理**非常有用.

定理 2.45 (同根引理) 设 $\{A_\alpha\mid\alpha\in\omega_1\}$ 为不可数个有限集合之集. 那么, 必然存在 ω_1 的一个无界子集 S 以及一个集合 R 来见证如下结论:

$$\forall\alpha\in S\,\forall\beta\in S\,(\alpha<\beta\to A_\alpha\cap A_\beta=R).$$

证明 令 $B=\bigcup\{A_\alpha\mid\alpha<\omega_1\}$ 以及从 B 到 ω_1 的双射 f. 令

$$\forall\alpha<\omega_1\,(B_\alpha=f[A_\alpha]).$$

由于每一个 A_α 都是有限的, 必然存在一个自然数 n 来保证

$$\{\alpha<\omega_1 \mid |A_\alpha|=n\} \text{ 是一个不可数子集.}$$

因此, 不妨假设 $\forall\alpha<\omega_1\ (|A_\alpha|=n)$.

对于每一个 $\alpha<\omega_1$, 令 $h(\alpha)=\max(B_\alpha)$. 令

$$C=\{\gamma<\omega_1 \mid \forall\alpha<\gamma\ (h(\alpha)<\gamma)\}.$$

那么, C 是 ω_1 的一个无界闭集. 对于 $k\leqslant n$, 令

$$S_k=\{\gamma\in C \mid |\gamma\cap B_\gamma|=k\}.$$

那么, $C=\bigcup\limits_{k\leqslant n} S_k$. 由于非荟萃集理想 NS_{ω_1} 是可数可加的, 必然有某个 S_k 为一个荟萃集合. 令 $T=S_k$ 为这样的一个荟萃集. 对于 $i\in\{1,2,\cdots,k\}$, 对于 $\gamma\in T$, 令 $f_i(\gamma)=B_\gamma$ 中的第 i 个元素. 那么,

$$\forall\gamma\in T\ (f_i(\gamma)<\gamma).$$

根据选择函数定理, 令 $T_1\subset T$ 为选择函数 f_1 为常值的荟萃集; 归纳地, 设 $i<k$ 以及

$$T\supset T_1\supset\cdots\supset T_i$$

为一系列荟萃集, 并且 $\forall 1\leqslant j\leqslant i$ 选择函数 f_j 在 T_j 上取常值. 那么, 令 T_{i+1} 为 T_i 的一个荟萃子集以见证选择函数 f_{i+1} 在其上取常值.

令 $Q=f_1[T_k]\cup f_2[T_k]\cup\cdots\cup f_k[T_k]$. 那么

$$\forall\alpha\in T_k\ \forall\beta\in T_k\ (\alpha<\beta\to B_\alpha\cap B_\beta=Q).$$

令 $R=h^{-1}[Q]$. 那么

$$\forall\alpha\in T_k\ \forall\beta\in T_k\ (\alpha<\beta\to A_\alpha\cap A_\beta=R).$$ □

现在我们来证明例 2.20 中的结论.

假设 $\{f_\alpha \mid \alpha<\omega_1\}$ 是一条不可数的反链: 如果 $\alpha<\beta<\omega_1$, 那么 f_α 与 f_β 相冲突. 令

$$B=\{\mathrm{dom}(f_\alpha) \mid \alpha<\omega_1\}.$$

如果 B 是一个可数集合, 那么

$$\exists X\in B\ |\{\alpha<\omega_1 \mid \mathrm{dom}(f_\alpha)=X\}|=\aleph_1.$$

但是, 对于这样的 X, 2^X 是一个有限集合, 所以, 必然地

$$\exists f \in 2^X\ |\{\alpha < \omega_1 \mid f_\alpha = f\}| = \aleph_1.$$

这与它们彼此不相容之假设矛盾. 因此, B 必是一个不可数的集合. 根据上面的同根引理 (定理 2.45), 令 (H, X) 满足下述要求:

(i) $H \subset \omega_1$ 为一个无界子集;

(ii) $X \subset \kappa$ 为一个有限集合;

(iii) $\forall \alpha,\ \beta \in H\ (\alpha < \beta \to \mathrm{dom}(f_\alpha) \cap \mathrm{dom}(f_\beta) = X)$.

对于 $f \in 2^X$, 令 $H_f = \{\alpha \in H \mid f_\alpha \supset f\}$. 那么,

$$\exists f \in 2^X\ |H_f| = \aleph_1.$$

但这是一个矛盾, 因为对于 H_f 中的任何两个不同的 α 和 β, $(f_\alpha \cup f_\beta) \in P$ 是一个函数. □

定义 2.38 (马丁[18]公理)　设 $\omega \leqslant \kappa$ 为一个基数. MA_κ 是后述命题: 如果 $(P, <)$ 是一个满足可数反链条件的偏序集合, $\mathscr{C}$ 是 $(P, <)$ 的不超过 κ 个稠密子集的集合, 那么一定存在 $(P, <)$ 的一个 $\mathscr{C}$-泛善子集 F.

MA_ω 是一个定理. 有趣的事情从 MA_{ω_1} 开始发生.

定理 2.46　如果 $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ 成立, 那么没有苏斯林树.

证明　如果 $(T, <)$ 是一棵苏斯林树, 那么 $(T, <)$ 是一个满足可数 (反) 链条件的偏序集合.

对于每一个 $\alpha < \omega_1$, T_α 是 $(T, <)$ 的一条极大反链, 从而

$$D_\alpha = \{t \in T \mid \exists s \in T_\alpha\,(s < t)\}$$

是一个稠密开子集. 根据 $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$, 令 $G \subset T$ 为一个与每一个 D_α 都有交的滤子.

于是, 对于每一个 $\alpha < \omega_1$, $G \cap T_\alpha$ 必有唯一的元素. 从而, $\bigcup G$ 是 $(T, <)$ 的一根等高树枝.

这与 $(T, <)$ 是苏斯林树之假设矛盾. □

定理 2.47　如果 MA_κ 成立, 那么 $2^\kappa = 2^{\aleph_0}$.

在证明这个定理之前, 我们先看它的一个很有趣的推论: 马丁公理蕴涵连续统势是一个正则基数.

推论 2.9　如果 MA 成立, 那么 $2^{\aleph_0}$ 是一个正则基数.

证明　令 $\kappa = \mathrm{cf}\left(2^{\aleph_0}\right)$. 根据柯尼希不等式 (定理 2.10), κ 为一个不可数正则基数. 如果 $\kappa < 2^{\aleph_0}$, 那么根据定理 2.47, $2^\kappa = 2^{\aleph_0}$, 从而

$$\kappa = \mathrm{cf}\left(2^{\aleph_0}\right) = \mathrm{cf}\left(2^\kappa\right),$$

[18] D. Martin.

这于柯尼希定理 2.10 的结论相矛盾. 因此, $\kappa = 2^{\aleph_0}$. □

现在我们来为定理 2.47 的证明做一些必要的准备. 定理证明的核心思想是将 κ 的子集合用实数编码表示出来, 也就是说, 将 κ 的每一个无穷子集都用一个实数记录起来, 并且这种记录是单一的. 这怎么可能呢? 这需要用到几乎不相交的概念 (参见定义 2.16) 以及由此得到用以实现实数编码的偏序集合. 然后再应用马丁公理来得到所要的编码实数.

在定理 2.20 中, 我们见到过自然数无穷子集之集合上有势为 $2^{\aleph_0}$ 的几乎不相交的子集. 在这里我们更关注的是极大的几乎不相交的集合.

定义 2.39 称集合 $\mathscr{A} \subset [\omega]^\omega$ 是一个**极大几乎不相交**的集合当且仅当 $\mathscr{A}$ 是一个非空的几乎不相交的集合, 并且对于任何 $x \in [\omega]^\omega$ 都必有 $y \in \mathscr{A}$ 以至于 $x \cap y \in [\omega]^\omega$.

例 2.21 设 $\{A_0, \cdots, A_n\}$ 是自然数集合的一个有限划分, 并且每一个 A_i 都是无穷的. 那么它便是一个极大几乎不相交的集合.

然而, 不会有可数无穷的极大几乎不相交的集合, 正如下述引理所指出的那样.

引理 2.23 如果 $\mathscr{A} \subset [\omega]^\omega$ 是一个可数无穷的几乎不相交的集合, 那么一定存在一个 $x \in [\omega]^\omega$ 来见证 $\mathscr{A} \cup \{x\}$ 依旧还是几乎不相交的集合.

证明 将可数的几乎不相交的集合 $\mathscr{A}$ 的元素单一地罗列出来:

$$\mathscr{A} = \{A_n \mid n < \omega\}.$$

对于 $n < \omega$, 令 $F_n = \{A_k \mid k \leqslant n\}$. 我们递归地定义 s_n 如下:

$s_0 = \{\min(A_0)\}$. 给定 s_n. 因为 A_{n+1} 与 F_n 中的所有元素都是几乎不相交的, 所以 $A_{n+1} - \bigcup F_n \neq \varnothing$. 令

$$s_{n+1} = s_n \cup \left\{\min\left(A_{n+1} - \bigcup F_n\right)\right\}.$$

最后, 令 $A = \bigcup\{s_n \mid n < \omega\}$. 那么 $A \in [\omega]^\omega$. 由 A 的定义和归纳法可见

$$\forall n < \omega \ (A \cap A_n \subset s_n).$$

因此, $\forall n < \omega \ (A_n \cap A \in [\omega]^{<\omega})$. □

仔细琢磨一下 A 的构造以及上面的证明, 我们发现之所以一个可数无穷的几乎不相交的集合不可能是极大几乎不相交集合的缘由, 就在于序列 $\langle (s_n, F_n) \mid n < \omega\rangle$ 有下述特点: 每一个 s_n 都是自然数的一个有限集合; 每一个 F_n 都是 $[\omega]^\omega$ 的一个几乎不相交的有限集合, 并且

$$\forall n \forall m \ (n < m \to (s_n \subset s_m \wedge (\forall A \in F_n \ (A \cap s_m \subset s_n)))).$$

现在我们就应用这一特点, 在给定一个无穷的几乎不相交的集合 $\mathscr{A}$ 的基础上, 我们来定义一个偏序集 $(P_{\mathscr{A}}, \leqslant)$:

定义 2.40 设 $\mathscr{A}$ 是 $[\omega]^\omega$ 的一个几乎不相交的无穷集合. 定义

$$P_{\mathscr{A}} = \left\{(s,F) \;\middle|\; s \in [\omega]^{<\omega} \wedge F \in [\mathscr{A}]^{<\omega}\right\}$$

以及定义

$$(s_1,F_1) \leqslant (s_0,F_0) \leftrightarrow (s_0 \subseteq s_1 \wedge F_0 \subseteq F_1 \wedge \forall x \in F_0\,(x \cap s_1 \subseteq s_0)).$$

令 $\mathbb{P}_{\mathscr{A}} = (P_{\mathscr{A}}, \leqslant)$. 称这个偏序集合为由 $\mathscr{A}$ 所诱导的**几乎不相交的偏序集**.

接下来, 我们验证由无穷的几乎不相交集合 $\mathscr{A}$ 所诱导的几乎不相交偏序集 $\mathbb{P}_{\mathscr{A}}$ 满足可数链条件.

引理 2.24 任给几乎不相交偏序集 $\mathbb{P}_{\mathscr{A}}$ 中的两个条件 (s_0,F_0) 和 (s_1,F_1), 它们是无冲突的当且仅当

$$\forall i < 2\, \forall x \in F_i\,(x \cap s_{1-i} \subseteq s_i),$$

当且仅当

$$\forall i < 2\, \forall x \in F_i\, \forall n \in (x - s_i)\,(n \notin s_{1-i}).$$

从而, 如果所给定的两个条件是无冲突的, 那么 $(s_0 \cup s_1, F_0 \cup F_1)$ 就是它们的共同加强条件.

证明 (练习.) □

引理 2.25 几乎不相交偏序集 $\mathbb{P}_{\mathscr{A}}$ 满足可数链条件.

证明 设 $F_i \in [\mathscr{A}]^{<\omega}$ $(i < 2)$. 设 $s \in [\omega]^{<\omega}$. 那么 $(s, F_0 \cup F_1) \leqslant (s, F_i)$ $(i < 2)$. □

定义 2.41 对于 $x \in [\omega]^\omega, n \in \omega$, 令

$$D_x = \{(s,F) \in P_{\mathscr{A}} \mid x \in F\}$$

以及

$$E_{x,n} = \{(s,F) \in P_{\mathscr{A}} \mid x \cap s \not\subseteq n\}.$$

对于 $\mathbb{P}_{\mathscr{A}}$ 上的一个滤子 G, 令 $g = \bigcup\{s \mid \exists F\,((s,F) \in G)\}$, 并且称此 g 为 G 的导出集合.

引理 2.26 (1) 如果 $x \in \mathscr{A}$, 那么 D_x 是 $\mathbb{P}_{\mathscr{A}}$ 的一个稠密开子集.

(2) 如果 $x \in [\omega]^\omega$, 并且对于所有的有限的 $F \subseteq \mathscr{A}$ 都有 $x - \bigcup F$ 是无穷的, 那么对于每一个 $n < \omega$ 都有 $E_{x,n}$ 是 $\mathbb{P}_{\mathscr{A}}$ 的稠密开子集.

(3) 设 $x \in \mathscr{A}$. 假设 $y \in [\omega]^\omega$ 具有后述性质: 对于所有有限的 $F \subseteq \mathscr{A}$ 都有 $y - \bigcup F$ 是无穷的. 假设 G 是偏序集 $\mathbb{P}_{\mathscr{A}}$ 的一个滤子, 并且 $G \cap D_x \neq \varnothing$ 以及对于所有的 $n < \omega$ 都有 $G \cap E_{y,n} \neq \varnothing$. 令 g 为 G 的导出集合. 那么

$$|g \cap x| < \omega \wedge |g \cap y| = \omega.$$

证明　(1) 设 $x \in \mathscr{A}$. 给定 $(s,F) \in P_{\mathscr{A}}$, 条件 $(s, F \cup \{x\}) \in D_x$, 并且

$$(s, F \cup \{x\}) \leqslant (s, F).$$

(2) 设 $(s,F) \in P_{\mathscr{A}}$ 以及 $n < \omega$. 由于 $x - \bigcup F$ 为无穷集合, 令 $m \in (x - \bigcup F)$ 满足不等式 $m > n$. 我们便有 $(s \cup \{m\}, F) \leqslant (s, F)$ 以及 $(s \cup \{m\}, F) \in E_{x,n}$.

(3) 假设 x, y, G 和 g 犹如引理中的 (3) 的条件所述. 令 $(s,F) \in G \cap D_x$. 如果 $(s', F') \in G$ 是一个更强的条件, 那么 $x \cap s' \subseteq s$. 因此 $g \cap x \subseteq s$. 这就表明 $g \cap x$ 是一个有限集合. 欲见 $g \cap y$ 无穷, 我们来证明它在 ω 中无界. 令 $n < \omega$. 因为 $G \cap E_{y,n} \neq \varnothing$, 令 $(s,F) \in G \cap E_{y,n}$. 由于 $s \cap y \not\subseteq n$, 令 $m \in s \cap (y - n)$. 那么 $m \in g \cap y$ 以及 $m > n$. □

定理 2.48　假设 MA_κ 成立. 设 $\kappa < 2^{\aleph_0}$ 是一个不可数的基数. 令 $\mathcal{B} \subset [\omega]^\omega$ 为一个势为 κ 的几乎不相交的集合. 那么

(1) $\mathcal{B}$ 不会是极大几乎不相交集合;

(2) 如果 $\mathscr{A} \subset \mathcal{B}$ 是无穷的, 那么必有一个无穷的 $g \subset \omega$ 来实现下述要求:

$$\forall x \in \mathcal{B}\ (x \in \mathscr{A} \leftrightarrow |x \cap g| < \omega).$$

于是, 存在一个从 $\mathfrak{P}(\mathcal{B}) - (\{\mathcal{B}\} \cup [\mathcal{B}]^{<\omega})$ 到 $[\omega]^\omega$ 的单射, 从而 $2^\kappa = 2^{\aleph_0}$.

证明　(1) 令 $y = \omega$. 由于 $\mathcal{B}$ 是无穷的, 对于任意的有限集合 $F \subset \mathcal{B}$, $y - \bigcup F$ 是无穷的. 由 MA_κ, 令 $G \subset P_{\mathcal{B}}$ 为一个与下述各稠密子集都有非空交的滤子:

$$\{D_x \mid x \in \mathcal{B}\} \cup \{E_{y,n} \mid n < \omega\}.$$

令 g 为 G 导出的集合. 那么 g 是 ω 的一个无穷子集, 并且与 $\mathcal{B}$ 中各元素都几乎不相交.

(2) 设 $\mathscr{A}$ 是 $\mathcal{B}$ 的一个无穷的真子集. 令 $G \subset P_{\mathscr{A}}$ 为一个与下述各稠密子集都有非空交的滤子:

$$\{D_x \mid x \in \mathscr{A}\} \cup \{E_{y,n} \mid n < \omega \wedge y \in (\mathcal{B} - \mathscr{A})\}.$$

令 g 为 G 的导出集合. 那么对于每一个 $x \in \mathscr{A}$ 都有 $g \cap x$ 是有限的; 而对于每一个 $y \in (\mathcal{B} - \mathscr{A})$ 都有 $g \cap y$ 是无穷的. □

2.6 划分定理

2.6.1 小势划分定理

定义 2.42(划分命题表达式)　设 r, s, κ, λ 为基数. 表达式 $\kappa \to (\lambda)^r_s$ 等价于下述命题:

如果 X 是一个势为 κ 的集合, $[X]^r = \{A \subseteq X \mid |A| = r\}$, $f : [X]^r \to s$, 那么一定存在满足下述要求的 X 的子集 H:

(1) $|H| = \lambda$;

(2) $\exists i \in s\ (f[[H]^r] = \{i\})$.

满足上述条件 (2) 的 H 被称为**划分函数**f 的**一个齐一集**[19].

定理 2.49 $\omega \to (\omega)^2_{n+2}$.

证明 设 $1 < m \in \mathbb{N}$ 以及 $f : [\omega]^2 \to m$. 我们如下递归地定义满足下述要求的序列 $\langle (a_n, H_n, i_n) \mid n < \omega \rangle$:

(1) $\forall k < n \in \omega\ H_n \subset H_k \subseteq \omega$ 都是无穷集合;

(2) $\forall k < n \in \omega\ (a_n \in H_k\ \wedge\ f(\{a_k, a_n\}) = i_k)$.

$n = 0$, $a_0 = 0$. 令

$$A_i^0 = \{k \in \omega \mid a_0 < k\ \wedge\ f(a_0, k) = i\}\ (i < m),$$

令

$$i_0 = \min\left(\left\{i < m\ \middle|\ \left|A_i^0\right| = \aleph_0\right\}\right),$$

以及 $H_0 = A^0_{i_0}$.

给定 $\langle (a_k, H_k, i_k) \mid k \leqslant n \rangle$. 令 $a_{n+1} = \min(H_n)$; 令

$$A_i^{n+1} = \{k \in H_n \mid a_{n+1} < k\ \wedge\ f(a_{n+1}, k) = i\}\ (i < m),$$

令

$$i_{n+1} = \min\left(\left\{i < m\ \middle|\ \left|A_i^{n+1}\right| = \aleph_0\right\}\right),$$

以及 $H_{n+1} = A^{n+1}_{i_{n+1}}$.

这样, $H_{n+1} \subset H_n$ 都是无穷集合; 如果 $k < n$, 那么 $a_n \in H_k$ 以及

$$f(\{a_k, a_n\}) = i_k\ .$$

令 $B = \{a_n \mid n < \omega\}$; 令 $g(a_n) = i_n < m$; 令

$$j = \min\left(\{i < m \mid |\{a_n \in B \mid g(a_n) = i\}| = \aleph_0\ \}\right);$$

以及 $H = \{a \in B \mid g(b) = j\}$. 那么, H 是一个无穷集合, 并且, $f[[H]^2] = \{j\}$. □

定理 2.50(拉姆齐[20]定理) $\omega \to (\omega)^{k+2}_{n+2}$.

---

19 齐一: 整齐划一.

20 Ramsey.

证明 应用关于 k 的归纳法. $k=0$ 是上述定理.

设 $r=k+2$, $f:[\omega]^{r+1}\to m>1$. 归纳假设: $\omega\to(\omega)^r_m$.

依据选择公理, 令 $\prec$ 为 $\mathfrak{P}(\omega)$ 上的一个秩序.

对于任意的 $a\in\omega$, 定义 $f_a:[\omega-\{a\}]^r\to m$:

$$\text{对 }\{n_1,\cdots,n_r\}\in[\omega-\{a\}]^r\text{ 令 }f_a(\{n_1,\cdots,n_r\})=f(\{a\}\cup\{n_1,\cdots,n_r\})\,.$$

对于任意的 $X\in[\omega-(a+1)]^\omega$, $f_a\restriction_{[X]^r}:[X]^r\to m$; 根据归纳假设, 这个分划函数有一个无穷齐一子集; 令 $g(a,X)\subset X$ 为在秩序 $\prec$ 下的最小的无穷齐一子集; 令 $j(a,X)$ 为 f_a 在 $[g(a,X)]^r$ 上的常值.

我们递归地定义一个具备下列性质的序列 $\langle(a_n,H_n,i_n)\mid n<\omega\rangle$:

(1) $a_k<a_{k+1}=\min(H_k)$;

(2) $H_{k+1}\subset H_k$ 是无穷集合;

(3) $\forall x\in[H_k]^r\ (f(\{a_k\}\cup x)=i_k)$.

令 $a_0=0$, $H_0=g(a_0,\omega-(a_0+1))$, $i_0=j(a_0,\omega-(a_0+1))$, 那么,

$$a_0<\min(H_0),$$

H_0 是一个无穷集合; 并且

$$\forall x\in[H_0]^r\ (f(\{a_0\}\cup x)=i_0).$$

给定 $\langle(a_k,H_k,i_k)\mid k\leqslant n\rangle$, 定义 $a_{n+1}=\min(H_n)$,

$$H_{n+1}=g\left(a_{n+1},H_n-(a_{n+1}+1)\right),\ i_{n+1}=j\left(a_{n+1},H_n-(a_{n+1}+1)\right).$$

那么, $a_n<a_{n+1}\in H_n, a_{n+1}<\min(H_{n+1})$, $H_{n+1}\subset H_n$ 是一无穷集合; 并且

$$\forall x\in[H_{n+1}]^r\ (f(\{a_{n+1}\}\cup x)=i_{n+1}).$$

对 $n\in\omega$, 令 $h(n)=i_n<m$. 那么 h 在 ω 的一个无穷子集 $X\subset\omega$ 上取常值 ℓ.

令 $H=\{a_n\mid n\in X\}$. 那么, 对于任意的 $\{b_0,b_1,\cdots,b_r\}_<\subset H$, 必有

$$f(\{b_0,b_1,\cdots,b_r\})=\ell.$$

□

现在我们应用拉姆齐划分定理和柯尼希等高树枝定理来证明两个有限划分定理: 拉姆齐有限划分定理以及巴黎–哈灵顿划分定理.

定理 2.51 (拉姆齐有限划分定理) 对于任意的 $1\leqslant n,m,k\in\mathbb{N}$, 必有一个足够大的 $\ell\in\mathbb{N}$ 来保证 $\ell\to(k)^n_m$ 成立.

证明 (I) 我们先用自然数集合上的数学归纳法来证明拉姆齐有限划分定理. 这表明拉姆齐有限划分定理是佩亚诺算术理论的一个定理.

首先, 设 $m=2$. 我们用关于 n 的归纳法来证明如下命题, $\varphi(n)$:

$$\forall p,q\in\mathbb{N}^+\ \exists\ell\in\mathbb{N}^+\ \left(\ell\to(p,q)_2^n\right),$$

其中 $\mathbb{N}^+=\mathbb{N}-\{0\}$.

$n=1$ 时是鸽子笼原理: 给定 $p,q\in\mathbb{N}^+$, 令 $\ell=p+q-1$, 那么, $\ell\to(p,q)_2^1$.

现在假设 $\varphi(n)$ 成立, 往证 $\varphi(n+1)$ 成立.

根据归纳假设, 对于 $p,q\in\mathbb{N}^+$, 令

$$R(p,q;n)=\min\left(\{\ell\mid\ell\to(p,q)_2^n\}\right).$$

用关于 $p+q$ 的归纳法来证明: $\exists\ell\in\mathbb{N}^+\ \left(\ell\to(p,q)_2^{n+1}\right)$.

注意, 如果 $p\leqslant n$ 或者 $q\leqslant n$, 那么

$$R(p,q;n)\to(p,q)_2^{n+1}.$$

因此, 假设 $\min(\{p,q\})>n$ 且

$$\forall p'+q'<p+q\ \exists\ell\ \left(\ell\to(p',q')_2^{n+1}\right).$$

令 ℓ_1 具备 $\ell_1\to(p-1,q)_2^{n+1}$, 以及 ℓ_2 具备 $\ell_2\to(p,q-1)_2^{n+1}$. 令 $\ell=R(\ell_1,\ell_2;n)+1$.

断言 $\ell\to(p,q)_2^{n+1}$.

设 $|X|=n$, $[X]^{n+1}=A_0\cup A_1$ 以及 $A_0\cap A_1=\varnothing$.

对于 $a\in X$, 令 $X^a=X-\{a\}$. 对于 $y\in[X^a]^n$, 定义

$$y\in B_0^a\iff(\{a\}\cup y)\in A_0,\ \ y\in B_1^a\iff(\{a\}\cup y)\in A_1.$$

这样, $[X^a]^n=B_0^a\cup B_1^a$ 以及 $B_0^a\cap B_1^a=\varnothing$.

由于 $|X^a|=R(\ell_1,\ell_2;n)$, 令 $H^a\subseteq X^a$ 见证如下事实:

(a) $|H^a|\geqslant\ell_1$ 且 $[H^a]^n\subseteq B_0^a$, 或者

(b) $|H^a|\geqslant\ell_2$ 且 $[H^a]^n\subseteq B_1^a$.

任意固定 $a\in X$.

设 (a) 成立. 根据 $\ell_1\to(p-1,q)_2^{n+1}$, 令 $H_0\subseteq H^a$ 见证如下事实:

(i) $|H_0|\geqslant p-1$ 且 $[H_0]^{n+1}\subseteq A_0$, 或者

(ii) $|H_0|\geqslant q$ 且 $[H_0]^{n+1}\subseteq A_1$.

如果 (i) 成立, 令 $H=H_0\cup\{a\}$, 那么 $|H|\geqslant p$ 且 $[H]^{n+1}\subseteq A_0$.

如果 (ii) 成立, 令 $H=H_0$, 那么 $|H|\geqslant q$ 且 $[H]^{n+1}\subseteq A_1$.

再设 (b) 成立. 根据 $\ell_2 \to (p, q-1)_2^{n+1}$, 令 $H_1 \subseteq H^a$ 见证如下事实:

(i) $|H_1| \geqslant q-1$ 且 $[H_1]^{n+1} \subseteq A_1$, 或者

(ii) $|H_1| \geqslant p$ 且 $[H_1]^{n+1} \subseteq A_0$.

如果 (i) 成立, 令 $H = H_1 \cup \{a\}$, 那么 $|H| \geqslant q$ 且 $[H]^{n+1} \subseteq A_1$.

如果 (ii) 成立, 令 $H = H_1$, 那么 $|H| \geqslant p$ 且 $[H]^{n+1} \subseteq A_0$.

综上所述, $\ell \to (p, q)_2^{n+1}$. 断言由此得证.

这就证明了: $\forall n, k \in \mathbb{N}^+ \ \exists \ell \in \mathbb{N}^+ \ (\ell \to (k)_2^n)$.

现在我们应用关于 $m \geqslant 2$ 的归纳法来证明 $\psi(m)$:

$$\forall n, k \in \mathbb{N}^+ \ \exists \ell \in \mathbb{N}^+ \ \left(\ell \to (k)_m^n\right).$$

假设 $m \geqslant 2$ 且 $\psi(m)$ 成立. 我们来证明 $\psi(m+1)$ 也成立.

给定 $m \geqslant 2, n, k$. 根据 $\psi(m)$, 设 $\ell_1 \to (k)_m^n$ 成立. 令 $p = \max(\{\ell_1, k\})$, 以及 $\ell = R(p, p; n)$.

我们来证: $\ell \to (k)_{m+1}^n$.

设 $|X| = \ell$, 以及

$$[X]^n = A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_{m-1} \cup A_m$$

将 $[X]^n$ 划分成 $m+1$ 个互不相交的组. 令

$$B_0 = A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_{m-1}, \quad B_1 = A_m.$$

那么 $[X]^n = B_0 \cup B_1$. 根据 $\ell = R(p, p; n)$, 令 $H' \subseteq X$ 见证如下事实: $|H'| \geqslant p$, 且

(i) $[H']^n \subseteq B_0$, 或者

(ii) $[H']^n \subseteq B_1$.

如果 $[H']^n \subseteq B_1 = A_m$, 那么 $H = H'$ 就是所要的齐一子集.

如果 $[H']^n \subseteq B_0$, 由于 $p \to (k)_m^n$ 成立, 令 $H \subseteq H'$ 见证:

$$|H| \geqslant k \ \wedge \ \exists i < m \ [H]^n \subseteq A_i.$$

这就证明了: $\ell \to (k)_{m+1}^n$. □

(II) 我们再应用紧致性来证明拉姆齐有限划分定理.

假设 (n, m, k) 是一组反例: 没有 $\ell \in \mathbb{N}$ 能够保证 $\ell \to (k)_m^n$ 成立.

对于 $\ell \in (\mathbb{N} - (n+1))$, $f : [\ell]^n \to k$, 令 $f \in T_\ell$ 当且仅当没有 $X \in [\ell]^m$ 可以是 f 的齐一子集; 也就是说, T_ℓ 是定义在 $[\ell]^n$ 上的全体反例之集合; T_ℓ 是一个有限集合, 并且对于任意的 $f \in T_{\ell+1}$, 那么 $f \restriction_{[\ell]^n} \in T_\ell$.

令 $\mathcal{T} = \bigcup_{\ell \in (\mathbb{N} - (n+1))} T_\ell$. $\mathcal{T}$ 是一个无限集合. 对于 $f, g \in \mathcal{T}$, 定义 $f \leqslant g$ 当且仅当 $f \subseteq g$. 这样, $(\mathcal{T}, \leqslant)$ 是一棵有限分叉树, 即任给 $f \in \mathcal{T}$, 比如, $f \in T_\ell$, 那么 f 的

直接分叉后继之集合 $\{g \in T_{\ell+1} \mid f \subset g\}$ 是一个有限集合. 根据柯尼希定理 (定理 2.41) 这样的有限分叉的无穷树一定有一根无穷树枝, 即有一个函数 $g : [\mathbb{N}]^n \to k$, $[\mathbb{N}]^n$ 上的一个 k 块划分, 它在每一个 $[\ell]^n$ 上的限制都在 $T_\ell \subset \mathcal{T}$ 中. 根据拉姆齐划分定理, 令 $H \subset \mathbb{N}$ 为 g 的一个无限齐一子集. 设 $\{a_1, \cdots, a_m\}$ 为 H 的前 m 个大于 n 的元素. 令 $\ell \in H - (a_m + 1)$. 那么, $g \restriction_{[\ell]^n} \in T_\ell$. 但这是一个不可能的事情: $X = \{a_1, \cdots, a_m\} \subset \ell$ 是 g 的一个 m 元齐一子集. □

定理 2.52 (巴黎–哈灵顿划分原理) 对于 $1 \leqslant n, k, m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ 中必有足够大的 ℓ 来见证如后事实: 如果 $f : [\ell]^n \to k$, 则必有如后所列性质的 $Y \subset \ell$,

(1) Y 是 f 的一个齐一集;

(2) $|Y| \geqslant \max(\{m, \min(Y)\})$.

证明 证明几乎如前. 假设定理不成立. 对于 $n < \ell \in \mathbb{N}$, $f : [\ell]^n \to k$, 令 $f \in T_\ell$ 当且仅当没有 $X \subset \ell$ 能够既满足 $\max(\{m, \min(X)\}) \leqslant |X|$ 又是 f 的齐一子集.

根据与前面拉姆齐有限划分定理的证明中同样讨论, 得到一个 $g : [\mathbb{N}]^n \to k$, 以至于对于每一个 $n < \ell$, 都有 $g \restriction_{[\ell]^n} \in T_\ell$.

根据拉姆齐划分定理, 令 $H \subset \mathbb{N}$ 为 g 的一个无限齐一子集. 令

$$x_1 = \min(H - (n+1)),\ s \in (\mathbb{N} - (\max(\{m, x_1\}) + 1)).$$

令

$$\{x_1, x_2, \cdots, x_s\} \subset H$$

为 H 中的单调递增的 s 个元素. 令 $\ell > x_s + 1$. 那么 $\{x_1, x_2, \cdots, x_s\} \subset \ell$ 是 $g \restriction_{[\ell]^n}$ 的一个合乎要求的齐一子集. 这是一个矛盾. □

尽管上面的拉姆齐有限划分定理 (定理 2.51) 和巴黎–哈灵顿划分原理 (定理 2.52) 都是拉姆齐 (无限) 划分定理 (定理 2.50) 的推论, 但这两个定理的复杂程度有着天大差别. 事实上, 拉姆齐有限划分定理是皮阿诺算术理论的一个定理, 但是巴黎–哈灵顿划分原理则是一个独立于佩亚算术理论的语句.

下面的例子表明拉姆齐定理不能够推广到 ω_1 上.

例 2.22 (1) 设 $X \subset \mathbb{R}$ 为一个势为 $\aleph_1$ 的子集, 令 $h : X \to \omega_1$ 为一个双射. 如下定义 $f : [X]^2 \to 2$: 对于 $\{a, b\} \in [X]^2$, 令

$$f(\{a,b\}) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } a < b \wedge h(a) < h(b), \\ 1 & \text{如果 } a < b \wedge h(a) > h(b). \end{cases}$$

那么, f 不可能有势为 $\aleph_1$ 的齐一子集.

(2) 事实上, $2^{\aleph_0} \not\to (\omega_1)^2_2$.

事实上, 上述例子只是一个更一般的事实的特例. 为此, 我们先证明一个引理:

引理 2.27 设 $\omega \leqslant \lambda$ 为一基数. 令 $A = 2^\lambda = \{0,1\}^\lambda$. 对于 A 中的 $f \neq g$, 令

$$\delta(f,g) = \min(\{\gamma < \lambda \mid f(\gamma) \neq g(\gamma)\}) \text{ 以及 } f < g \leftrightarrow f(\delta(f,g)) < g(\delta(f,g)),$$

这是 A 的一个线性序 (A 的字典序). 那么 A 在其字典序下不会有长度为 λ^+ 的严格单增或严格单减的序列.

证明 假设 $\langle f_\alpha \mid \alpha < \lambda^+\rangle$ 是 A 的一个在字典序下严格单增的序列. 令

$$D = \{\eta \leqslant \lambda \mid |\{f_\alpha \restriction_\eta \mid \alpha < \lambda^+\}| = \lambda^+\}.$$

那么, $D \neq \varnothing$. 令 $\gamma = \min(D)$. 不妨假设 $\forall \alpha < \beta < \lambda^+ \ (f_\alpha \restriction_\gamma \neq f_\beta \restriction_\gamma)$.

对于 $\alpha < \lambda^+$, 令 $\xi_\alpha = \delta(f_\alpha, f_{\alpha+1})$. 那么,

$$f_\alpha \restriction_{\xi_\alpha} = f_{\alpha+1} \restriction_{\xi_\alpha}, \quad f_\alpha(\xi_\alpha) = 0 < f_{\alpha+1}(\xi_\alpha) = 1.$$

由于 $\xi_\alpha < \gamma \leqslant \lambda$, 函数 $\alpha \mapsto \xi_\alpha$ 必定在 λ^+ 的一个无界子集 B 上取常值 $\xi < \gamma$.

我们现在来验证: 对于 $\{\alpha, \beta\} \subset B$, 如果 $\alpha < \beta$, 那么 $f_\alpha \restriction_\xi \neq f_\beta \restriction_\xi$.

设 $\{\alpha, \beta\} \subset B$, 那么 $\xi = \xi_\alpha = \xi_\beta$; 如果 $f_\alpha \restriction_\xi = f_\beta \restriction_\xi$, 则

$$f_\beta < f_{\alpha+1} \text{ 以及 } f_\alpha < f_{\beta+1},$$

从而 $\alpha = \beta$.

这就意味着: $\{f_\alpha \restriction_\xi \mid \alpha \in B\}$ 是一个势为 λ^+ 的函数族, 从而 $\xi \in D \cap \gamma$. 这与 $\gamma = \min(D)$ 相矛盾. □

例 2.23 设 $\omega \leqslant \lambda$ 为一基数. 那么 $2^\lambda \not\to (\lambda^+)^2_2$. 考虑 $A = 2^\lambda = \{0,1\}^\lambda$ 上的字典序以及 A 的一个秩序 $\prec$. 如 (1) 中那样比较 $<$ 与 $\prec$ 是否一致或者相反, 得到一个关于 $[A]^2$ 的分划. 由于 A 在其字典序下不会有长度为 λ^+ 的严格单增或严格单减的序列, 这个分划便不会有势为 λ^+ 的齐一子集[21].

与这个例子形成鲜明对比的是下述定理:

定理 2.53 (埃德斯–拉铎[22]定理) $\left(2^{\aleph_0}\right)^+ \to (\omega_1)^2_\omega$.

证明 令 $\kappa = \left(2^{\aleph_0}\right)^+$. 设 $F : [\kappa]^2 \to \omega$. 我们来为 F 找一个势为 $\aleph_1$ 的整齐子集.

对于 $\alpha \in \kappa$, 令 $F_\alpha : (\kappa - \{\alpha\}) \to \omega$ 由下式确定: 对 $\beta \in \kappa$, $\beta \neq \alpha$, 令

$$F_\alpha(\beta) = F(\{\alpha, \beta\}).$$

现在我们断言下述事实成立:

21 这个划分被称为谢尔品斯基 (Sierpinski) 划分.

22 Erdös-Rado Theorem.

$$\exists A \subset \kappa \ \big(|A| = 2^{\aleph_0} \ \wedge \forall C \in [A]^\omega \, \forall \alpha \in (\kappa - C) \, \exists \beta \in (A - C) \ (F_\beta \restriction_C = F_\alpha \restriction_C)\big) \, .$$

为证明这个断言, 我们如下构造 κ 的子集的一个单调递增的序列

$$A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_\alpha \subset \cdots \ (\alpha < \omega_1)$$

以至于每个 A_α 的势都是 $2^{\aleph_0}$:

令 $A_0 \subset \kappa$ 为前 $2^{\aleph_0}$ 个序数 (可以是任意的这个势的子集). 对于严格小于 ω_1 的极限序数 α, 令

$$A_\alpha = \bigcup \{ A_\beta \mid \beta < \alpha \} \, ;$$

给定 A_α, 固定一个 $C \in [A_\alpha]^\omega$. 对于每一个 $f \in \omega^C$ 令 α_f 为 $(\kappa - C)$ 中最小的实现等式

$$F_\beta \restriction_C = f$$

的序数 β; 令

$$B(C) = \left\{ \alpha_f \in (\kappa - C) \ \middle| \ f \in \omega^C \right\} .$$

那么, $|B(C)| \leqslant 2^{\aleph_0}$, 并且

$$\forall \beta \in (\kappa - C) \, \exists \alpha \in B(C) \ (F_\alpha \restriction_C = F_\beta \restriction_C) \, .$$

再令 $A_{\alpha+1} = A_\alpha \cup \bigcup \{ B(C) \mid C \in [A_\alpha]^\omega \}$.

最后, 令 $A = \bigcup\limits_{\alpha < \omega_1} A_\alpha$. 此 A 就有断言所要求的性质.

现在我们利用这个断言中的 A 来获得所要的整齐子集.

令 $\gamma \in (\kappa - A)$. 如下递归地构造序列 $\langle x_\alpha \in A \mid \alpha < \omega_1 \rangle$:

令 $x_0 = \min(A)$. 对于 $\alpha < \omega_1$, 令 $C = \{ x_\beta \mid \beta < \alpha \}$. 令

$$x_\alpha = \min \{ \delta \in (A - C) \mid F_\delta \restriction_C = F_\gamma \restriction_C \} \, .$$

令 $X = \{ x_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \}$. 对于 $a \in X$, 令 $G(a) = F_\gamma(a)$. 那么

$$G : X \to \omega.$$

令 $H \subset X$ 为一个势为 $\aleph_1$ 且 G 在它上面的常值函数的集合. 此 H 就是 F 的一个整齐子集. □

接下来我们证明 ω_1 上的一个正面的划分整齐性定理.

定义 2.43 表达式 $\kappa \to (\kappa, \omega + 1)^2_2$ 等价于下述命题:

如果 $f : [\kappa]^2 \to 2$, 那么, 或者存在 f 的一个势为 κ 的齐一子集; 或者存在 f 的一个序型为 $\omega + 1$ 的齐一子集.

定理 2.54 (埃德斯–杜希尼克–米勒[23]定理)　设 $\kappa \geqslant \omega_1$ 是一个正则基数. 那么, $\kappa \to (\kappa, \omega+1)^2_2$.

证明　我们只证明 $\kappa = \omega_1$ 的情形. 一般情形的论证是完全一样的.

设 $f : [\omega_1]^2 \to 2$. 对于每一个非零极限序数 $\alpha \in \omega_1$, f 限制在 $[\alpha+1]^2$ 时必有一个无穷齐一子集. 如果存在一个非零极限序数 α 以及存在一个序型为 ω 的子集 $X \subset \alpha$ 实现 $X \cup \{\alpha\}$ 是 f 的一个齐一子集之要求, 那么, 我们就得到一个序型为 $\omega+1$ 的齐一子集.

我们不妨假设：对于任意的非零极限序数 $\alpha \in \omega_1$, 不存在 α 的序型为 ω 的子集 X 来见证 $X \cup \{\alpha\}$ 是 f 的一个齐一子集.

如下定义一个选择函数：对于 $\alpha \in \omega_1'$, 固定 $[\alpha]^{<\omega}$ 的一个秩序 $\prec_\alpha$, 令

$$g(\alpha) \in [\alpha]^{<\omega}$$

为满足下述要求的 $\prec_\alpha$ 下最小的集合：

(i) $g(\alpha) \cup \{\alpha\}$ 是 f 的一个齐一子集;

(ii) $\forall \gamma \in (\alpha - g(\alpha))$ $\{\gamma\} \cup g(\alpha) \cup \{\alpha\}$ 都不是 f 的齐一子集.

此 $g(\alpha) \neq \varnothing$, 再令 $h(\alpha) = \max(g(\alpha))$. 那么 h 在一个荟萃集 $S \subset \omega_1'$ 取常值 γ. 由于 $[\gamma+1]^{<\omega}$ 是一个可数集合, 非荟萃集理想是一个可数可加理想, 函数 g 必然在 S 的某个荟萃子集 T 上取常值 a. 对于每一个 $\alpha \in T$, 令 $k(\alpha) = i$ 当且仅当 f 在 $a \cup \{\alpha\}$ 上取常值 i. 在此划分之下, k 必在 T 一个荟萃子集 U 上取常值 $i_0 < 2$. 于是, f 在 $[U]^2$ 上取常值 $j = 1 - i_0$. □

2.6.2　大势划分定理

我们还可以进一步分析 ω 上的拉姆齐划分定理向不可数基数上的自然推广必定遭遇高阶无穷存在性.

定义 2.44　一个不可数的基数 κ 是一个**弱紧基数**当且仅当 $\kappa \to (\kappa)^2_2$.

定理 2.55　设 $\kappa > \omega$ 为一个基数, 那么如下命题等价:

(1) κ 是一个弱紧基数;

(2) κ 是一个不可达基数, 并且 κ 具有树特性;

(3) $\forall 1 < \eta < \kappa$ $(\kappa \to (\kappa)^2_\eta)$.

证明　(1)⇒(2). 设 κ 是一个弱紧基数.

(a) κ 必定是一个正则基数. 否则, 设

$$\kappa = \bigcup_{\xi<\lambda} A_\xi$$

23 Erdös-Dushnik-Miller Partition Theorem.

并且 $\lambda<\kappa, \forall\xi<\eta<\lambda\,(A_\xi\cap A_\eta=\varnothing)$, 以及 $\forall\xi<\lambda\,(|A_\xi|<\kappa)$.

如下定义 $f:[\kappa]^2\to\{0,1\}$：对于 $\alpha<\beta<\kappa$,

$$f(\{\alpha,\beta\})=0\leftrightarrow\exists\xi<\lambda\,(\{\alpha,\beta\}\subset A_\xi).$$

此分划 f 就没有势为 κ 的齐一子集.

(b) $\forall\omega\leqslant\lambda=|\lambda|<\kappa\ \left(2^\lambda<\kappa\right)$. 否则, 令 $\omega\leqslant\lambda=|\lambda|<\kappa$ 满足 $2^\lambda\geqslant\kappa$. 根据例 2.23,

$$2^\lambda\not\to(\lambda^+)^2_2\ ;$$

而 $\lambda^+\leqslant\kappa\leqslant2^\lambda$, 所以 $2^\lambda\not\to(\kappa)^2_2$; 因此, $\kappa\not\to(\kappa)^2_2$, 这与 κ 是弱紧基数之假设相矛盾.

(c) κ 具有树特性. 设 $(T,<_T)$ 是棵高度为 κ 的树, 并且每一层 $|T_\alpha|<\kappa$. 因为 κ 是一个不可达基数, $|T|=\kappa$. 不妨假设 $T=\kappa$.

先将 κ 上的偏序 $<_T$ 扩展成一个线性序 $\prec$: 如果 $\alpha<_T\beta$, 那么 $\alpha\prec\beta$; 如果 α 与 β 不可比较, 那么两个区间 $[r(T),\alpha]_T$ 与 $[r(T),\beta]_T$ 必有一个分叉层 ξ (其中 $r(T)$ 为 T 的树根), 令 α_ξ 以及 β_ξ 分别为各自的第一个不相同的前导节点, 再令 $\alpha\prec\beta$ 当且仅当 $\alpha_\xi<\beta_\xi$.

定义 $f:[\kappa]^2\to2$：$f(\{\alpha,\beta\})=1$ 当且仅当在 $\{\alpha,\beta\}$ 上, 两个序 $\prec$ 与 $<$ 相一致.

依据 κ 的弱紧性, 令 $H\in[\kappa]^\kappa$ 为 f 的齐一集. 定义

$$B=\{\gamma<\kappa\mid|\{\alpha\in H\mid\gamma<_T\alpha\}|=\kappa\}.$$

由于每一个 $|T_\alpha|<\kappa, \forall\alpha<\kappa\,(B\cap T_\alpha\neq\varnothing)$. 现在我们验证 B 中的任意两个元素都是 $<_T$ 可比较的, 从而, B 就是 $(T,<_T)$ 的一根等高树枝.

假设 $x,y\in B$ 在 $<_T$ 下不可比较.

不妨假设 $x\prec y$. 它们各自都在 H 中有 κ 后继. 在 H 中取 $\alpha<\beta<\gamma$ 并且满足

$$x<_T\alpha,\ y<_T\beta,\ x<_T\gamma.$$

由 $\prec$ 的定义, $\alpha\prec\beta$ 以及 $\gamma\prec\beta$. 根据 f 的定义,

$$f(\{\alpha,\beta\})=1\neq0=f(\{\beta,\gamma\}).$$

这是一个矛盾, 因为 H 是 f 的齐一集.

(2)⇒(3). 设 κ 为一个不可达基数, 且具备树特性. 设 $1<\eta<\kappa$ 以及

$$f:[\kappa]^2\to\eta\ .$$

我们需要为 f 找到一个势为 κ 的齐一集.

我们递归地构造一棵树 $(T,\subset)$, 其节点都是些从某个 $\gamma<\kappa$ 到 η 的函数. 对每一个 $\alpha<\kappa$, 我们将添加一个新节点 t_α.

$t_0=\varnothing$. 假设已经添加了 $\langle t_\beta \mid \beta<\alpha\rangle$. 欲添加 t_α. 我们递归地构造 $t_\alpha\restriction_\xi$.

启始步, $t_\alpha\restriction_0=t_0$, 假设已经构造了 $t_\alpha\restriction_\xi$. 我们检查一下 $t_\alpha\restriction_\xi$ 是否在那些 $t_\beta\,(\beta<\alpha)$ 之中. 如果是的, 比如, 存在某个 $\beta<\alpha$ 来见证 $t_\alpha\restriction_\xi=t_\beta$, 我们就令 $t_\alpha(\xi)=f(\{\beta,\alpha\})$; 如果不是, 也就是说, 对于所有的 $\beta<\alpha$, $t_\alpha\restriction\xi$ 都不同于 t_β, 那么就完成对 t_α 的递归构造, 即令 $t_\alpha=t_\alpha\restriction_\xi$.

这样构造出来的树 $(T,\subset)$ 的势为 κ; 由于 κ 是一个不可达基数, T 的每一层的势都小于 κ. 由构造过程可知, 如果 $t_\beta\subset t_\alpha$, 那么 $\beta<\alpha$ 以及

$$t_\alpha(\mathrm{dom}(t_\beta))=f(\{\beta,\alpha\})\ .$$

根据 κ 所具备的树特性, 树 $(T,\subset)$ 有一根等高树枝 $B\subset T$. 对每一个 $i\in\eta$, 令

$$H_i=\{\alpha<\kappa \mid t_\alpha\in B\ \wedge\ (t_\alpha\cup\{(\mathrm{dom}(t_\alpha),i)\})\in B\},$$

那么, $f[[H_i]^2]=\{i\}$. 由于 $\eta<\kappa$, $\ell(B)=\kappa$, 必有某个 H_i 的势为 κ. □

2.7 练　　习

练习 2.1　定义 $S_\omega=\{f \mid f:\omega\to\omega$ 是一个双射$\}$. 证明:

$$|S_\omega|=|\omega^\omega|.$$

练习 2.2　证明: 若 $\omega\leqslant\alpha<\omega_1$, $A_\alpha=\{f \mid f:\omega\to\alpha$ 是一个双射 $\}$, 那么, $|A_\alpha|=|\omega^\omega|$.

练习 2.3　证明: 如果 A 可以线性序化 (即 A 上面存在一个线性序), $S\subseteq[A]^{<\omega}$, 那么 S 上有一个选择函数.

练习 2.4　证明: 如果 A 可以秩序化, 那么 $\mathfrak{P}(A)$ 可以线性序化.

练习 2.5　证明下述命题等价:

(1) 佐恩引理.

(2) 对于任意集合 A, 如果 A 具有下述性质,

$$\forall B\subset A\left(\text{“}(B,\subseteq)\ \text{是一个线性有序集合”}\ \text{蕴涵}\ \left(\bigcup B\right)\in A\right),$$

那么 A 有一个 $\subseteq$-极大元.

(3) 每一个具有有限特征的集合之集都有一个 $\subseteq$-极大元, 其中, 一个集合之集 A 被称为具有有限特征当且仅当

$$\forall X\ \left(X \in A \leftrightarrow [X]^{<\omega} \subset A\right).$$

练习 2.6　证明下述命题:

(1) 选择公理蕴涵相关选择原理.

(2) 相关选择原理蕴涵可数选择公理.

练习 2.7　假设选择公理. 设 $<$ 是集合 A 上的一个二元关系. 证明: $<$ 是一个有秩关系当且仅当 A 上不存在一个 $<$-严格单减序列 $\langle a_i \mid i < \omega \rangle$:

$$\forall i \in \omega\,(a_{i+1} < a_i).$$

练习 2.8　证明: 如果 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是连续加法同态映射, 那么 f 一定是一个倍数函数.

练习 2.9　设 X 是一个非空集合, 以及 $\mathscr{F}$ 是 X 上的一个滤子. 证明:

(1) 如果 $\langle A_i \mid i < n \rangle\,(n \in \omega)$ 是 $\mathscr{F}$ 中的一个有限序列, 那么

$$\left(\bigcap\{A_i \mid i < n\}\right) \in \mathscr{F}.$$

(2) 如果 X 是一个有限集合, 并且 $\mathscr{F}$ 是 X 上的一个超滤子, 那么 $\mathscr{F}$ 一定是 X 上的一个平凡超滤子.

练习 2.10　设 $\langle C_\alpha \mid \alpha < \kappa^+ \rangle$ 为例 2.12 中定义的典型无界闭子集序列. 证明:

$$\forall \kappa \leqslant \alpha < \beta < \kappa^+\ \left((C_\beta - C_\alpha) \in [\kappa]^{<\kappa}\right).$$

练习 2.11　设 κ 是一个不可数的正则基数. 证明: 如果任何一个荟萃子集上的选择函数必然在某个荟萃子集上取常值, 那么 κ 上的典型滤子必然具有正规特性. 也就是说, 对一个 κ-完全的滤子而言, 其正规特性与上述定理中的特性等价.

练习 2.12　设 κ 为一个不可数的正则基数. 设 $\mathscr{F}$ 是 κ 上的一个 κ-完全的滤子. 那么如下命题等价.

(1) 如果 $A \in \mathscr{F}^+$, f 是 A 上的一个选择函数, 那么 f 一定在某个 $B \in \mathscr{F}^+$ 上为常值函数.

(2) $\mathscr{F}$ 关于对角线交是封闭的, 即对于任意的序列 $\langle A_\alpha \in \mathscr{F} \mid \alpha < \kappa \rangle$, 都有

$$\mathscr{F} \ni \Delta_{\alpha<\kappa} A_\alpha = \{\gamma \in \kappa \mid \forall \alpha < \gamma\ (\gamma \in A_\alpha)\}.$$

(3) $\mathscr{F}$ 的对偶理想 $\mathscr{I} = \{A \subset \kappa \mid (\kappa - A) \in \mathscr{F}\}$ 关于对角线并是封闭的, 即对于任意的序列 $\langle A_\alpha \in \mathscr{I} \mid \alpha < \kappa \rangle$, 都有

$$\mathscr{I} \ni \nabla_{\alpha<\kappa} A_\alpha = \{\gamma \in \kappa \mid \exists \alpha < \gamma\ (\gamma \in A_\alpha)\}.$$

练习 2.13　设 $X \subset \omega_1$ 是一个在 ω_1 中的无界子集. 证明:

$$C_X = \{\alpha \in \omega_1' \mid X \cap \alpha \text{ 在 } \alpha \text{ 中无界}\}$$

是一个无界闭子集.

练习 2.14　设 $f : \omega_1 \to \omega_1$ 为一个单调递增函数. 证明:

$$C_f = \{\alpha < \omega_1 \mid \forall \beta \in \alpha \, (f(\beta) < \alpha)\}$$

是一个无界闭集.

练习 2.15　设 $f : [\omega_1]^{<\omega} \to \omega_1$. 证明:

$$C_f = \{\alpha < \omega_1 \mid \forall e \in [\alpha]^{<\omega} \; (f(e) \in \alpha)\}$$

是一个无界闭集.

练习 2.16　设 $S \subset \omega_1$ 是一个荟萃集, $f : S \to [\omega_1]^{<\omega}$ 具备下述性质:

$$\forall \alpha \in S \, (f(\alpha) \subset \alpha) \; .$$

证明: f 在 S 的一个荟萃子集上取常值.

练习 2.17　(1) $=^*_{\mathscr{I}}$ 是一个等价关系;

(2) $\subseteq^*_{\mathscr{I}}$ 是一个自反传递关系;

(3) $<^*_{\mathscr{I}}$ 是一个非自反的传递关系.

练习 2.18　证明: 在上述证明中定义的两个序列具有如后性质: 对于任意的 $\alpha < \omega_2$, 总有

$$\{\gamma \in \omega_1 \mid f_\alpha(\gamma) = g_\alpha(\gamma)\} \in \mathscr{C}_{\omega_1}.$$

也就是说, $\forall \alpha < \omega_2 \; (f_\alpha =^*_{\mathrm{NS}_{\omega_1}} g_\alpha)$.

练习 2.19　证明: 如果 $X \subset \omega_1$ 是一个荟萃集, 那么 X 是 ω_1 个彼此互不相交的荟萃子集之并.

练习 2.20　假设 $\kappa > \omega$ 是一个基数, $\mathscr{U}$ 是 κ 上的一个非平凡的 κ-完全的超滤子. 令 $X = \kappa^\kappa$ 为所有从 κ 到 κ 的函数之集. 应用 $\mathscr{U}$ 在 X 上定义 $=^*$ 以及 $\in^*$ 如上述定理之证明那样. 令 $\pi : (X/=^*, \in^*) \cong (\lambda, \in)$ 为同构映射. 证明: $\mathscr{U}$ 是一个正规超滤子当且仅当 $\pi([\mathrm{Id}]) = \kappa$, 其中 Id 是 κ 上的恒等函数.

练习 2.21　证明: 在定理 2.42 的证明中所构造的树 $(T, <)$ 有一条不可数的反链.

练习 2.22　应用数学归纳法证明拉姆齐有限划分定理.

练习 2.23　设 $(P, <)$ 是一个无穷偏序集. 证明: P 或者有一个在 $<$ 下的无穷线性子集, 或者有一个无穷的在 $<$ 下彼此不可比较的子集.

练习 2.24 设 $(A,<)$ 是一个线性有序集. 证明: A 或者有一个与自然数有序集同构的子序集 $(X,<)$, 或者有一个与负整数有序集同构的子序集 $(Y,<)$.

练习 2.25 设 X 是一个无穷集合, $<_1$ 以及 $<_2$ 是 X 上的两个秩序. 证明:

$$\exists Y \subset X \ (|Y| = |X| \wedge Y^2 \cap <_1 = Y^2 \cap <_2).$$

(提示: 先讨论 $|X|$ 是正则基数的情形, 再讨论 $|X|$ 是奇异基数的情形.)

练习 2.26 证明: $\exists f : [\mathbb{N}]^{<\omega} \to 2 \ \forall H \in [\mathbb{N}]^{\omega} \ f[[H]^{<\omega}] = 2$.

(提示: 考虑 $f(X) = 0 \leftrightarrow |X| \in X$.)

练习 2.27 如果 κ 是一个可测基数, $\mathscr{U}$ 是 κ 上的一个非平凡的 κ-完全的正规超滤子, 那么

$$\{\lambda < \kappa \mid \lambda \text{ 是一拉姆齐基数}\} \in \mathscr{U}.$$

练习 2.28 证明: 定理 2.27 中所给出的典型函数序列具有如下性质:

$$\forall \eta < \kappa^+ \ (\|f_\eta\| = \eta).$$

练习 2.29 设 $\beta < \omega_1$. 验证: 如果 $\left\{\alpha < \omega_1 \;\middle|\; 2^{\aleph_\alpha} \leqslant \aleph_{\alpha+\beta}\right\}$ 是 ω_1 的一个荟萃子集, 那么 $2^{\aleph_{\omega_1}} \leqslant \aleph_{\omega_1+\beta}$.

练习 2.30 令 $\mathscr{F}_s(\kappa, A) = \{D \subseteq \mathfrak{P}_\kappa(A) \mid \exists f : [A]^{<\omega} \to A \ (D_f \subseteq D)\}$. 验证:

(i) $\mathscr{F}_s(\kappa, A)$ 是一个 ω_1-完全的滤子;

(ii) 设 $T \subseteq \mathfrak{P}_\kappa(A)$ 具备如下性质: 若 $D \in \mathscr{F}_s(\kappa, A)$, 则 $T \cap D \neq \varnothing$. 如果 $f : T \to A$ 是 D 上的一个选择函数, 那么一定存在一个 $a \in A$ 满足下述要求:

$$\forall D \subseteq \mathfrak{P}_\kappa(A) \ (D \in \mathscr{F}_s(\kappa, A) \to \exists X \in D \, (f(X) = a)).$$

练习 2.31 称 $D \subset \mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 为一个**定向**子集当且仅当 $\forall x \in D \forall y \in D \exists z \in D \ (x \cup y \subseteq z)$. 对于 $f : [\lambda]^{<\omega} \to \mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$, 令

$$C_f = \left\{x \in \mathfrak{P}_\kappa(\lambda) \;\middle|\; \forall e \in [x]^{<\omega} \ (f(e) \subseteq x)\right\}.$$

验证:

(1) 如果 C 是 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 的一个非空闭子集, $D \subset C$ 是一个定向子集, 并且 $|D| < \kappa$, 那么 $(\bigcup D) \in C$;

(2) 如果 $f : [\lambda]^{<\omega} \to \mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$, 那么 C_f 是 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 的一个无界闭子集;

(3) 如果 C 是 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 的一个无界闭子集, 那么一定存在一个函数 $f : [\lambda]^{<\omega} \to \mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 来实现不等式 $C_f \subseteq C$.

第3章 实数集合

3.1 实 数 轴

令 $(\mathbb{Q}, 0, 1, +, \cdot, <)$ 为定义 1.42 中引进的有理数结构. 在它的基础上, 我们来定义实数集合 $\mathbb{R}$ 以及实数结构 $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, <)$.

定义 3.1 (实数集合) (1) 对于 $A \in \mathfrak{P}(\mathbb{Q})$ 而言, 称 A 为一个**实数**, 当且仅当

(i) A 非空;

(ii) A 有界, 即 $\exists r \in \mathbb{Q}\ \forall a \in A\ (a < r)$;

(iii) A 是左闭关的, 即 $\forall a \in \mathbb{Q}\ ((\exists b \in A\ a \leqslant b) \to a \in A)$;

(iv) A 中无最大元, 即 $\forall a \in A\ \exists b \in A\ (a < b)$.

(2) $\mathbb{R} = \{A \in \mathfrak{P}(\mathbb{Q}) \mid A \text{ 是一个实数}\}$.

(3) 对于 $r \in \mathbb{Q}$, 令 $A_r = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < r\}$; 称 $A \in \mathbb{R}$ 为一个**有理数**当且仅当 $\exists r \in \mathbb{Q}\ (A = A_r)$, 当且仅当 $\mathbb{Q} - A$ 有最小元; 称 $A \in \mathbb{R}$ 为一个**无理数**当且仅当 $\mathbb{Q} - A$ 没有最小元.

(4) 对于 $A \in \mathbb{R}$ 以及 $B \in \mathbb{R}$, 令

$$A < B \leftrightarrow A \subset B.$$

定理 3.1 (可分性) (1) $\forall r \in \mathbb{Q}\ (A_r \in \mathbb{R})$;

(2) $(\mathbb{R}, <)$ 是一个无端点稠密线性有序集合;

(3) 子集合 $\{A_r \mid r \in \mathbb{Q}\}$ 在 $(\mathbb{R}, <)$ 上处处稠密, 即如果 $A < B$, 则

$$\exists r \in Q\ (A < A_r < B);$$

(4) 如果 $A \in \mathbb{R}$, 那么 $A = \bigcup\{A_r \mid r \in A\}$;

(5) 映射 $r \mapsto A_r$, 是 $(\mathbb{Q}, <)$ 到 $(\mathbb{R}, <)$ 中的一个稠密嵌入映射 (如果 $A < B$, 那么 $\exists r \in Q\, (A < A_r < B)$).

证明 (2) 设 $A \in \mathbb{R}$. 令 $r \in \mathbb{Q}$ 为 A 的一个上界; 令 $s \in A$. 那么,

$$A_s < A < A_r.$$

所以, $(\mathbb{R}, <)$ 无端点.

设 $A \neq B$ 为两个实数. 如果 $A - B \neq \varnothing$, 那么一定有 $B < A$.

为此, 设 $r \in A - B$. 我们断言 $B - A = \varnothing$. 因若不然, 令 $s \in B - A$, 那么, $r \neq s$, 从而或者 $r < s$, 但这意味着 $r \in B$, 这不可能; 或者 $s < r$, 但这意味着 $s \in A$, 同样不可能. 这种左右为难的现象表明 $B - A = \varnothing$. 从而 $B < A$. 同样地, 如果 $B - A \neq \varnothing$, 那么 $A < B$. 这表明 $\mathbb{R}$ 中的任何两个元素都是在 $<$ 下可比较的.

设 $A < B < C$ 为三个实数. 那么, $A \subset B \subset C$, 从而 $A < C$.

设 $A < B$, 令 $r \in B - A$. 那么, $A < A_r < B$. 这表明 $<$ 是一个稠密序, 同时也表明 (3) 成立. □

推论 3.1 (弱可分性) *如果 $\mathscr{A}$ 是实数轴上的彼此互不相交的开区间的集合, 那么 $\mathscr{A}$ 一定是一个可数集合.*

证明 设 $f : \omega \to \mathbb{Q}$ 为一个双射. 给定实数轴上的彼此互不相交的开区间的集合 $\mathscr{A}$, 令

$$X = \{n \in \omega \mid \exists I \in \mathscr{A}\ n = \min(\{i \in \omega \mid f(i) \in I\})\}.$$

那么, $|\mathscr{A}| = |X| \leqslant |\mathbb{N}|$. □

实数轴唯一性

现在我们来证明这个实数轴 $(\mathbb{R}, <)$ 是序完备的, 即任何一个非空有上界的实数子集都有一个最小上界.

定义 3.2 *一个线性有序集合 $(L, <)$ 是**序完备**的当且仅当如果 $X \subset L$ 是一个非空有界子集, 那么在 X 的所有上界之中必有一个最小上界, 称为 X 的**上确界**, 并记成 $\sup(X)$; 在 X 的所有下界之中必有一个最大下界, 称为 X 的**下确界**, 并记成 $\inf(X)$.*

定理 3.2 (序完备性) *设 $X \subset \mathbb{R}$ 为一个有界的非空子集合, 那么 X 必有上确界, 也必有下确界.*

证明 给定 $\mathbb{R}$ 的一个非空有界子集 X, 令

$$B = \bigcup X \ \wedge \ A = \begin{cases} \left(\bigcap X\right) - \left\{\max\left(\bigcap X\right)\right\} & \text{如果 } \bigcap X \text{ 有最大元}, \\ \bigcap X & \text{如果 } \bigcap X \text{ 没有最大元}. \end{cases}$$

那么, $\{A, B\} \subset \mathbb{R}$, 并且 $B = \sup(X)$ 以及 $A = \inf(X)$. □

定理 3.3 (康托尔唯一性) *如果 $(X, <)$ 是一个序完备的无端点稠密线性有序集合, 并且包含一个在其中处处稠密的可数无穷子集合, 那么 $(X, <) \cong (\mathbb{R}, <)$.*

证明 设 $(X, <)$ 是一个序完备的无端点稠密线性有序集合, 以及 $D \subset X$ 是一个在 X 中处处稠密的可数无限子集. 那么, $(D, <)$ 是一个可数的无端点稠密线性有序集合. 根据康托尔同构定理 (定理 1.38), 令

$$f : (D, <) \cong (\mathbb{Q}, <).$$

对于每一个 $x \in X$, 令 $D_x = \{a \in D \mid x \leqslant a\}$, 以及 $B_x = f[D_x]$ 和 $A_x = \mathbb{Q} - B_x$; 并且定义

$$F(x) = A_x.$$

那么, $F : (X, <) \cong (\mathbb{R}, <)$. □

问题 3.1 (苏斯林问题) 如果 $(X, <)$ 是一个序完备的无端点稠密线性有序集合, 并且具备弱可分性, 即当 $\mathscr{A}$ 是 $(X, <)$ 上的彼此互不相交的开区间的集合时 $\mathscr{A}$ 一定可数, 那么是否一定有 $(X, <) \cong (\mathbb{R}, <)$?

3.2 实数有序域结构

引理 3.1 (1) 如果 $A, C \in \mathbb{R}$, 令

$$A + C = \{x + y \mid x \in A \wedge y \in C\}.$$

那么, $A + C \in \mathbb{R}$.

(2) 对于 $r \in \mathbb{Q}$, 令 $(-A_r) = A_{(-r)}$. 那么 $A_r + (-A_r) = A_0$.

(3) 设 $A \in \mathbb{R}$ 并且 $\forall r \in \mathbb{Q}\ (A \neq A_r)$. 令

$$-A = \{-x \mid x \in (\mathbb{Q} - A)\}.$$

那么, $(-A) \in \mathbb{R}$, 并且 $A + (-A) = A_0$.

证明 (练习.) □

定义 3.3 (实数加法) (a) 对于 $A, C \in \mathbb{R}$, 令

$$A + C = \{x + y \mid x \in A \wedge y \in C\}\ .$$

(b) 对于 $r \in \mathbb{Q}$, 令 $(-A_r) = A_{(-r)}$.

(c) 设 $A \in \mathbb{R}$ 并且 $\forall r \in \mathbb{Q}\ (A \neq A_r)$. 令 $-A = \{-x \mid x \in (\mathbb{Q} - A)\}$.

定理 3.4 (1) 设 $A, B, C \in \mathbb{R}$. 那么

(a) $A + B = B + A$;

(b) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

(c) $A + (-A) = A_0$;

(d) 如果 $B < C$, 那么 $A + B < A + C$;

(2) $(\mathbb{R}, 0, +, <)$ 是一个有序加法群, 其中 $0 = A_0$.

(3) 映射 $r \mapsto A_r$ 是一个有序群嵌入映射.

证明 (练习.) □

定义 3.4 $\mathbb{R}^+ = \{A \in \mathbb{R} \mid A_0 < A\}$.

引理 3.2 对于 $A, C \in \mathbb{R}^+$, 令

$$A \cdot C = \{r \in \mathbb{Q} \mid \exists x \in (A - A_0)\, \exists y \in (C - A_0)\, (r \leqslant x \cdot y)\},$$

以及

(a) 如果 $\exists x \in \mathbb{Q}\,(0 < x \wedge A = A_x)$, 则令 $A^{-1} = A_{x^{-1}}$, 其中 $A = A_x$;

(b) 如果 $A < A_1$ 且 $\forall r \in \mathbb{Q}\,(A \neq A_r)$, 则令

$$A^{-1} = \left\{r \in \mathbb{Q} \;\middle|\; \exists x \in (A_1 - A)\left(r \leqslant \frac{1}{x}\right)\right\};$$

(c) 如果 $A_1 < A$ 且 $\forall r \in \mathbb{Q}\,(A \neq A_r)$, 则令

$$A^{-1} = \left\{r \in \mathbb{Q} \;\middle|\; \exists x \in (\mathbb{Q} - A)\left(r \leqslant \frac{1}{x}\right)\right\}.$$

那么

(1) $A \cdot C \in \mathbb{R}^+$;

(2) $A \cdot C = C \cdot A$;

(3) $A \cdot A_1 = A$;

(4) $A^{-1} \in \mathbb{R}$ 并且 $A \cdot A^{-1} = A_1$.

证明 (1) 令 $B = A \cdot C$. 那么 B 非空; 有上界 (令 $r \in \mathbb{Q}$ 为 A 的一个上界; $b \in \mathbb{Q}$ 为 C 的一个上界, 那么 $b \cdot r$ 是 B 的一个上界); 左封闭; 没有最大元：设 $r \in B$, 令 $x \in A$, $y \in C$, $x > 0$, $y > 0$ 见证 $r \leqslant x \cdot y$, 再取 $x_1 \in A$ 满足 $x_1 > x$ 以及 $y_1 \in C$ 满足 $y < y_1$. 那么 $r \leqslant x \cdot y < x_1 \cdot y_1 \in B$.

(3) 首先, $A_1 \cdot A \subseteq A$. 其次, 令 $x \in A$ 且 $0 < x$. 取 $y \in A$ 满足要求 $x < y$. 那么

$$0 < \frac{x}{y} \in A_1 \;\wedge\; \left(x = \frac{x}{y} \cdot y\right) \in A_1 \cdot A.$$

所以, $A \subseteq A_1 \cdot A$.

(4) (a) 设 $\exists r \in \mathbb{Q}\,(0 < r \wedge A = A_r)$. 需验证 $A \cdot A^{-1} = A_1$.

首先, $A_r \cdot A_{r^{-1}} \subseteq A_1$：设 $0 < x < r$, $0 < y < r^{-1}$, 那么, $x \cdot y \in A_1$, 因为

$$x \cdot y < r \cdot y < r \cdot r^{-1} = 1.$$

其次, 设 $0 < a \in A_1$. 取 $b \in \mathbb{Q}$ 满足如后要求：$a < b^2 < b < 1$. 那么,

$$b \cdot r \in A_r \;\wedge\; b \cdot r^{-1} \in A_{r^{-1}} \;\wedge\; a < b^2 = b \cdot r \cdot b \cdot r^{-1}.$$

所以, $a \in A_r \cdot A_{r^{-1}}$.

(b) 设 $A < A_1$ 且 $\forall r \in \mathbb{Q}\,(A \neq A_r)$. 此时

$$A^{-1} = \left\{ r \in \mathbb{Q} \;\middle|\; \exists x \in (A_1 - A) \left(r \leqslant \frac{1}{x} \right) \right\}.$$

由定义直接得到 A^{-1} 非空且为左封闭; 它有上界：任取 $0 < y \in A$, 那么对于任意的 $x \in (A_1 - A)$ 都有 $x^{-1} < y^{-1}$; 最后, 它无最大元, 因为 $A_1 - A$ 中没有最小元.

我们现在来验证 $A \cdot A^{-1} = A_1$.

先验证 $A \cdot A^{-1} \subseteq A_1$：令 $0 < y \in A$, $x \in (A_1 - A)$, 那么 $y < x$ 以及

$$y \cdot x^{-1} < 1 \ .$$

再验证 $A_1 \subseteq A \cdot A^{-1}$：设 $0 < x \in (A_1 - A)$. 由于 $0 < x < 1$, $x^{n+1} < x^n$ 以及 $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, 令 $n \geqslant 1$ 满足 $x^n \notin A$ 但是 $x^{n+1} \in A$. 那么, $x^{-n} \in A^{-1}$ 并且 $x = x^{n+1} \cdot x^{-n} \in A \cdot A^{-1}$.

(c) 设 $A_1 < A$ 且 $\forall r \in \mathbb{Q}\,(A \neq A_r)$. 此时

$$A^{-1} = \left\{ r \in \mathbb{Q} \;\middle|\; \exists x \in (\mathbb{Q} - A) \left(r \leqslant \frac{1}{x} \right) \right\}.$$

由定义直接得到 A^{-1} 非空且为左封闭; 它有上界, 比如 1 就是一个上界; 最后, 它无最大元, 因为 $\mathbb{Q} - A$ 中没有最小元.

我们现在来验证 $A \cdot A^{-1} = A_1$.

先验证 $A \cdot A^{-1} \subseteq A_1$：令 $0 < y \in A$, $x \in (\mathbb{Q} - A)$, 那么 $y < x$ 以及

$$y \cdot x^{-1} < 1 \ .$$

再验证 $A_1 \subseteq A \cdot A^{-1}$：设 $0 < x \in (A_1 - A^{-1})$. 由于 $0 < x < 1$, $x^{n+1} < x^n$ 以及 $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, 令 $n \geqslant 1$ 满足 $x^n \notin A^{-1}$ 但是 $x^{n+1} \in A^{-1}$. 那么, $x^{-n} \in A$ 并且 $x = x^{n+1} \cdot x^{-n} \in A \cdot A^{-1}$. □

定义 3.5 (正实数乘法) 对于 $A, C \in \mathbb{R}^+$, 定义

$$A \cdot C = \{ r \in \mathbb{Q} \mid \exists x \in (A - A_0)\, \exists y \in (C - A_0)\, (r \leqslant x \cdot y) \}$$

以及

(a) 如果 $\exists x \in \mathbb{Q}\,(0 < x \wedge A = A_x)$, 则定义 $A^{-1} = A_{x^{-1}}$, 其中 $A = A_x$;

(b) 如果 $A < A_1$ 且 $\forall r \in \mathbb{Q}\,(A \neq A_r)$, 则定义

$$A^{-1} = \left\{ r \in \mathbb{Q} \;\middle|\; \exists x \in (A_1 - A) \left(r \leqslant \frac{1}{x} \right) \right\};$$

(c) 如果 $A_1 < A$ 且 $\forall r \in \mathbb{Q}\,(A \neq A_r)$, 则定义

$$A^{-1} = \left\{ r \in \mathbb{Q} \;\middle|\; \exists x \in (\mathbb{Q} - A) \left(r \leqslant \frac{1}{x} \right) \right\}.$$

引理 3.3 设 $A, B, C \in \mathbb{R}^+$. 那么

(1) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;

(2) $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$;

(3) 如果 $B < C$, 那么 $A \cdot B < A \cdot C$.

证明 (练习.) □

定义 3.6 (实数乘法) 对于 $A \in \mathbb{R}$ 以及 $C \in \mathbb{R}$, 令

$$A \cdot C = \begin{cases} A \cdot C & \text{如果 } \{A, C\} \subset \mathbb{R}^+, \\ A_0 & \text{如果 } A = A_0 \vee C = A_0, \\ (-A) \cdot (-C) & \text{如果 } A < A_0 \wedge C < A_0, \\ -(A \cdot (-C)) & \text{如果 } A > A_0 \wedge C < A_0, \\ -((-A) \cdot C) & \text{如果 } A < A_0 \wedge C > A_0. \end{cases}$$

对于 $A \in \mathbb{R}$ 且 $A < A_0$, 令 $A^{-1} = -(-A)^{-1}$.

定理 3.5 设 $A, B, C \in \mathbb{R}$. 那么

(1) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;

(2) $A \cdot B = B \cdot A$;

(3) 如果 $A \neq A_0$, 那么 $A \cdot A^{-1} = A_1$;

(4) $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$;

(5) 如果 $B < C$ 且 $A_0 < A$, 那么 $A \cdot B < A \cdot C$;

(6) 如果 $B < C$ 且 $A < A_0$, 那么 $A \cdot B > A \cdot C$.

证明 (练习.) □

定理 3.6 $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, <)$ 是一个有序域, 其中 $0 = A_0$, $1 = A_1$; 映射 $r \mapsto A_r$ 是一个有序域嵌入映射.

证明 (练习.) □

3.3 连续统假设

现在我们来探讨有关实数集合的几个集合论问题.

定义 3.7 $\mathbb{R}$ 表示全体实数所组成的集合.

定理 3.7 (康托尔) 实数集合 $\mathbb{R}$ 不可数.

证明 我们来证明闭区间 $[0, 1]$ 是不可数的.

假设不然. 设 $f : \omega \to [0, 1]$ 为一个满射. 令 $a_n = f(n)$ $(n \in \mathbb{N})$. 我们递归地定义两个严格单增序列 $\langle b_n, c_n \ : \ n < \omega \rangle$: 令 $b_0 = a_0$. 令 k 为不等式方程 $b_0 < a_m$ 中关于 m 的最小解. 再令 $c_0 = a_k$. 现在假定我们已经定义了

$$b_0 < b_1 < \cdots < b_n < c_n < \cdots < c_1 < c_0.$$

令 k 是不等式方程 $b_n < a_m < c_n$ 中关于 m 的最小解. 令 $b_{n+1} = a_k$.

令 i 是不等式方程 $b_{n+1} < a_m < c_n$ 中关于 m 的最小解. 令 $c_{n+1} = a_i$.

这样 $\langle b_n \mid n < \omega \rangle$ 和 $\langle c_n : n < \omega \rangle$ 分别是序列 $\langle a_n \mid n < \omega \rangle$ 的严格单增 (减) 子序列, 并且每一个 b_n 都严格小于任何一个 c_m, 任意一个 a_m 都一定小于等于某一个 b_n 或者大于等于某一个 c_k.

令 $b \in [0, 1]$ 为单增有界序列 $\langle b_n : n < \omega \rangle$ 的上确界. 那么对于任意的 m, n 我们都有 $b_n < b < c_m$. 特别地, b 不同于任何一个 a_n. 矛盾. □

定理 3.8 $|\mathbb{R}| = |(0, 1)| = |[0, 1]|$.

证明 函数 $f(x) = \tan(x)$ 是从 $(-\pi/2, \pi/2)$ 到 $\mathbb{R}$ 上的一个双射. 函数

$$g(x) = c + \frac{d-c}{b-a}(x-a)$$

是从开区间 (a, b) 到开区间 (c, d) 上的一个双射.

令 $A = \left\{ \frac{1}{n+2} \,\middle|\, n \in \omega \right\}$. 对 $n \in \omega$, 我们令

$$f_0\left(\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{n+4};$$

又令 $f_0(0) = 1/2$, $f_0(1) = 1/3$. 于是, $f_0 : \{0, 1\} \cup A \to A$ 是一个双射.

对 $x \in \{0, 1\} \cup A$, 令 $f(x) = f_0(x)$; 对 $x \in (0, 1) - A$, 令 $f(x) = x$. 那么,

$$f : [0, 1] \to (0, 1)$$

是一个双射. □

定理 3.9 (1) $|\mathbb{R}| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$.

(2) $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$.

(3) $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$.

证明 (1) 因为 $\mathbb{R} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{Q}) \times \mathfrak{P}(\mathbb{Q})$, 所以

$$|\mathbb{R}| \leqslant |\mathfrak{P}(\mathbb{Q}) \times \mathfrak{P}(\mathbb{Q})| = |\mathfrak{P}(\omega) \times \mathfrak{P}(\omega)| = |\mathfrak{P}(\omega \times \omega)| = |\mathfrak{P}(\omega)|.$$

对于 $f \in 2^{\omega}$, 我们定义

$$A_f = \left\{ r \in \mathbb{Q} \,\middle|\, \exists k \in \mathbb{N} \left(r < \sum_{i=0}^{k+1} \frac{f(i)}{3^{i+1}} \right) \right\},$$

那么 $A_f \in \mathbb{R}$, 并且如果 $f \neq g$, 那么 $A_f \neq A_g$, 所以,

$$|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |2^{\mathbb{N}}| \leqslant |\mathbb{R}|.$$

(2) 对于 $(f,g)\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 令 $G(f,g)=f*g\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 其中

$$\forall n\in\mathbb{N}\ (f*g)(n)=\begin{cases} f\left(\dfrac{n}{2}\right) & \text{如果 } n \text{ 是偶数,}\\ g\left(\dfrac{n-1}{2}\right) & \text{如果 } n \text{ 是奇数.}\end{cases}$$

那么, $G:\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 是一个单射, 从而 $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|\leqslant|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|\leqslant|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$. □

定义 3.8 称实数的一个集合 X 的势为 $\mathfrak{c}$ 是指 $|X|=|\mathbb{R}|$, $\mathfrak{c}=|\mathbb{R}|$.

连续统假设 (CH) 任何一个不可数的实数的子集合都与实数集合 $\mathbb{R}$ 等势.

定理 3.10 如果选择公理成立, 那么 $\mathfrak{c}=2^{\aleph_0}\geqslant\aleph_1$.

在选择公理之下, 连续统假设则表述为: $2^{\aleph_0}=\aleph_1$.

前面我们已经见到任何一个开区间或者闭区间 (非空) 都和整个实数轴等势. 现在来看当我们从实数轴上取走一个可数集合时, 所剩下的仍和实数轴等势.

定理 3.11 若 $A\subseteq\mathbb{R}$ 可数, 那么 $\mathbb{R}-A$ 的势仍为 $\mathfrak{c}$.

证明 我们证明: 若 $A\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 可数, 那么 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}-A$ 与 $\mathbb{R}$ 等势.

设 $A\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 可数. 那么 $B=\{a\in\mathbb{R}\mid\exists b\in\mathbb{R}\,(a,b)\in A\}$ 也可数. 令 $a_0\in(\mathbb{R}-B)$, 那么

$$A\cap(\{a_0\}\times\mathbb{R})=\varnothing\ .$$

所以

$$|\mathbb{R}|\leqslant|\mathbb{R}\times\mathbb{R}-A|\leqslant|\mathbb{R}\times\mathbb{R}|=|\mathbb{R}|.$$ □

引理 3.4 令 $\mathbb{Q}[X]$ 为全体有理系数多项式的集合. 令 A 为全体实代数数的集合, 那么

$$|\mathbb{Q}|\leqslant|A|\leqslant|(\mathbb{Q}[X])^{<\omega}|\leqslant|\left(\mathbb{Q}^{<\omega}\right)^{<\omega}|=|\left(\mathbb{N}^{<\omega}\right)^{<\omega}|=|\mathbb{N}|.$$

由于全体实代数数所成的集合是一个可数集合, 由上述定理我们便知道全体实超越数的集合同整个实数轴等势. 这个事实可以如下直接证明: 令 A 为全体实代数数之集合. $(A,0,1,+,\times,<)$ 是实数域的一个可数真子域. 令 $\mathbb{R}^+$ 为全体正实数之集合, $\eta\in(\mathbb{R}-A)$ 为一个实超越数. 对于 $x\in\mathbb{R}^+$, 定义

$$f(x)=\begin{cases}\eta-x & \text{如果 } (\eta-x)\notin A,\\ \eta+x & \text{如果 } (\eta-x)\in A.\end{cases}$$

首先, $\forall x\in\mathbb{R}^+\ (f(x)\notin A)$. 实际上, 如果 $(\eta-x)\in A$, 那么 $(\eta+x)\notin A$. 这是因为如果 $(\eta\pm x)\in A$, 那么

$$\eta=\frac{(\eta-x)+(\eta+x)}{2}\in A.$$

其次, f 是一个单射. 假设 $x, y \in \mathbb{R}^+$ 并且 $f(x) = f(y)$. 由于不会有 $y = -x$, 必然有 $\eta - x \neq \eta + y$, 以及 $\eta + x \neq \eta - y$. 从而只能有

(1) 或者 $\eta - x = \eta - y$;

(2) 或者 $\eta + x = \eta + y$.

因而 $x = y$. 这个单射 f 表明: $|\mathbb{R} - A| \geqslant |\mathbb{R}^+| = |\mathbb{R}|$.

3.4 实数轴拓扑结构

利用实数轴上的序我们在实数轴上引进一个拓扑结构.

定义 3.9 (1) 实数轴上的一个以 $a \in \mathbb{R}$ 为左端点以 $b \in \mathbb{R}$ 为右端点的**开区间**, 记成 (a, b), 是如下集合:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \wedge x < b\};$$

(于是, $(a, b) \neq \varnothing \leftrightarrow a < b$, 因此, 记号 (a, b) 将自动假设 $a < b$.) 实数轴上的一个以 $a \in \mathbb{R}$ 为左端点以 $b \in \mathbb{R}$ 为右端点的闭区间, 记成 $[a, b]$, 是如下集合:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \wedge x \leqslant b\}.$$

(于是, $[a, b] \neq \varnothing \leftrightarrow a \leqslant b$. 因此, 记号 $[a, b]$ 将自动假设 $a \leqslant b$.) 类似地, 定义半开半闭区间

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \wedge x < b\} \quad \text{和} \quad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \wedge x \leqslant b\};$$

以及

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}; \quad (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\};$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}; \quad [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \geqslant x\}; \quad (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

(2) $A \subseteq \mathbb{R}$ 为**开集**当且仅当对于任意的 $a \in \mathbb{R}$, 如果 $a \in A$, 那么一定有一个正实数 ε 来满足要求 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq A$.

(3) $\tau_o = \{X \subseteq \mathbb{R} \mid X \text{ 是一个开集 }\}$; 称 τ_o 为实数轴 $\mathbb{R}$ 上的**序拓扑**, 并且称 $(\mathbb{R}, \tau_o)$ 为实数轴**序拓扑空间**.

(4) $A \subseteq \mathbb{R}$ 为**闭集**当且仅当它的补集 $(\mathbb{R} - X)$ 是一个开集.

(5) 对于 $A \subseteq \mathbb{R}$, A 的**闭包**, 记成 $\bar{A}$, 是包含 A 的最小闭集:

$$\bar{A} = \bigcap \{B \subseteq \mathbb{R} \mid A \subseteq B \wedge B \text{ 是一个闭集}\}.$$

(注意: $\mathbb{R}$ 是一个闭集, 所以上述交是合理的.)

(6) 对于 $A \subseteq \mathbb{R}$, A 的**内集**, 记成 A°, 是被 A 包含的最大开集:

$$A^\circ = \bigcup\{B \subseteq A \mid B \text{ 是一个开集}\}.$$

事实 (1) $\varnothing$ 和 $\mathbb{R}$ 都既是开集又是闭集.

(2) 若 F 是一个有限的非空集合, 而且 F 中的每一个元素都是一个开集, 那么 $\bigcap F$ 是一个开集.

(3) 若 F 是一个由一些开集所组成的集合, 那么 $\bigcup F$ 是一个开集.

备注: 上述三条组成一个集合 X 上的拓扑 σ 的定义公理 $\sigma \subset \mathfrak{P}X$ 是 X 上的一个**拓扑** (其中的元素被称为 X 的**开集**) 当且仅当

(a) $\varnothing \in \sigma$, $X \in \sigma$;

(b) σ 对于有限交是封闭的;

(c) σ 对于任意子集合的并是封闭的.

(4) 若 F 是一个有限集合, 而且 F 中的每一个元素都是一个闭集, 那么 $\bigcup F$ 是一个闭集.

(5) 若 F 是一个由一些闭集所组成的非空集合, 那么 $\bigcap F$ 是一个闭集.

关于拓扑空间的探讨形成多门专业而丰富的学科, 这里不会过多涉及, 我们仅仅围绕实数轴来展开讨论, 甚至连对贝尔空间的讨论也将放在本《导引》的最后一章专门展开.

定义 3.10 设 $X \subset \mathbb{R}$. 当有序子集 $(X, <)$ **继承** $\mathbb{R}$ 的序拓扑, 即 $A \subset X$ 是 X 上的一个开集当且仅当 $\exists B \in \tau_o\ (A = B \cap X)$ 时, 我们称它为 $(\mathbb{R}, \tau_o)$ 的**拓扑子空间**.

比如, 每一个开 (闭) 区间都自然是实数轴的拓扑子空间. 可是作为拓扑空间, (a, b) 与 $[a, b]$ 有着非常本质的差别. 那么这些拓扑子空间应当怎样依照拓扑性质来加以区分呢? 对它们来讲, 最基本的区分就是拓扑同胚.

定义 3.11 设 X 和 Y 是实数轴的两个拓扑子空间, $f : X \to Y$.

(1) f 是一个**连续函数**当且仅当如果 $A \subseteq Y$ 是 Y 上的一个开集, 那么 A 在 f 下的原像集合

$$f^{-1}[A] = \{a \in X \mid f(a) \in A\}$$

是 X 的一个开集.

(2) f 是一个**拓扑同胚映射**当且仅当 f 是一个连续双射, 并且 f^{-1} 也是一个连续函数.

(3) X 与 Y 同胚当且仅当存在一个从 X 到 Y 的拓扑同胚映射.

例 3.1 实数轴上的所有 (非空) 开区间都拓扑同胚; 实数轴上所有非空有界闭区间都拓扑同胚; 但是开区间 (a, b) 不与闭区间 $[a, b]$ 拓扑同胚.

实数轴上有标准的绝对值函数:

定义 3.12 实数轴上的绝对值函数 $\mathbb{R} \ni x \mapsto |x| \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ 定义如下: 对于 $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{如果 } x \geqslant 0, \\ -x & \text{如果 } x < 0. \end{cases}$$

我们所熟悉的绝对值函数的基本性质如下:

命题 3.1 (1) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$;

(2) $||a| - |b|| \leqslant |a-b|$;

(3) $|ab| = |a| \cdot |b|$;

(4) $|a| \leqslant |b|$ 当且仅当 $-|b| \leqslant a \leqslant |b|$;

(5) $|a| < |b|$ 当且仅当 $-|b| < a < |b|$;

(6) $a^2 = b^2$ 当且仅当 $|a| = |b|$.

证明 (练习.) □

利用实数轴上的绝对值函数, 我们引进实数轴上的距离函数如下:

定义 3.13 对于 $x, y \in \mathbb{R}$, 定义 x 与 y 的距离 $d(x,y) = |x-y|$.

命题 3.2 实数轴上的距离函数有如下特性:

(1) $\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\, ((d(x,y) \geqslant 0) \wedge (d(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y))$;

(2) $\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\, (d(x,y) = d(y,x))$;

(3) $\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\, \forall z \in \mathbb{R}\, (d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z))$.

也就是说, 定义 3.13 所确定的 $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ 的确是一个距离函数.

证明 (练习.) □

定义 3.14 设 (X, τ) 为一个拓扑空间. 称拓扑空间 (X, τ) 是可距离化的当且仅当存在一个具备下述三条基本性质的从 X^2 到 $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ 上的映射 d.

(1) $\forall x \in X\, \forall y \in X\, ((d(x,y) \geqslant 0) \wedge (d(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y))$.

(2) $\forall x \in X\, \forall y \in X\, (d(x,y) = d(y,x))$.

(3) $\forall x \in X\, \forall y \in X\, \forall z \in X\, (d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z))$.

(称之为 X 上的一个距离函数) 以至于 X 上的拓扑 τ 可以以下述方式被 d 诱导出来:

(a) $\forall x \in X\, \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+\, (O(x,\epsilon) = \{y \in X \mid d(x,y) < \epsilon\} \in \tau)$;

(b) $\forall A \in \tau\, (A \neq \varnothing \to \forall a \in A\, \exists \epsilon \in \mathbb{R}^+\, (O(a,\epsilon) \subseteq A))$, 其中

$$O(a,\epsilon) = \{y \in X \mid d(a,y) < \epsilon\}.$$

(称集合 $O(a,\epsilon)$ 为点 a 的 ϵ-**开邻域**.)

定理 3.12 实数轴上的序拓扑是一个可距离化拓扑, 并且事实上由定义 3.13 所确定的距离函数就诱导出实数轴的序拓扑.

证明 设 (a,b) 是实数轴上的一个非空开区间. 令 $r=\dfrac{a+b}{2}$ 为开区间 (a,b) 的中点, 令 $\epsilon=b-r$. 那么

$$\forall x\in\mathbb{R}\,(x\in(a,b)\leftrightarrow d(r,x)<\epsilon).$$

再者, 对于 $a\in\mathbb{R}$, $\epsilon\in\mathbb{R}^+$, 那么

$$O(a,\epsilon)=\{y\in\mathbb{R}\mid d(a,y)<\epsilon\}=(a-\epsilon,a+\epsilon)\,. \qquad \square$$

我们知道实数轴在序拓扑下是一个完备空间 (定理 3.2): 任何非空有界子集必有上确界和下确界. 既然实数轴上的序拓扑可以经它上面的距离函数诱导出来, 那么在这种距离拓扑下, 它的序完备性在距离拓扑下又具有什么样的含义呢? 它上面的函数的连续性又当如何呢?

在距离拓扑下, 实数轴的距离完备性可以由柯西序列的概念来表述.

定义 3.15 实数轴上的一个可数无穷序列 $\langle a_n\mid n<\omega\rangle$ 是一个**柯西序列**当且仅当

$$\forall\epsilon\in\mathbb{R}^+\,\exists K\in\mathbb{N}\,\forall n\in\mathbb{N}\,\forall m\in\mathbb{N}\,((K<n\wedge K<m)\rightarrow d\,(a_n,a_m)=|a_n-a_m|<\epsilon)\,.$$

称一个实数 a 是一个可数无穷序列 $\langle a_n\mid n<\omega\rangle$ 的**极限**, 或者序列 $\langle a_n\mid n<\omega\rangle$ **收敛于** a, 记成 $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, 当且仅当

$$\forall\epsilon\in\mathbb{R}^+\,\exists K\in\mathbb{N}\,\forall n\in\mathbb{N}\,(K<n\rightarrow d\,(a_n,a)=|a_n-a|<\epsilon)\,.$$

称一个序列 $\langle a_n\mid n<\omega\rangle$ 为一个**收敛序列**, 或者它**有极限**, 当且仅当

$$\exists a\in\mathbb{R}\,\left(a=\lim_{n\to\infty}a_n\right).$$

应用柯西序列这一概念, 实数轴的距离完备性可以表述如下:

定理 3.13 实数轴上任何柯西序列都是收敛序列.

证明 设 $\langle a_n\mid n<\omega\rangle$ 是一个柯西序列. 那么它必是一个有界序列, 也就是说该序列的值域

$$A=\{a_n\mid n<\omega\}$$

是一个有界集合. 应用柯西序列的定义, 令 $\epsilon=1$, 令 $K\in\mathbb{N}$ 见证如下不等式:

$$\forall n\in\mathbb{N}\,\forall m\in\mathbb{N}\,((K<n\wedge K<m)\rightarrow d\,(a_n,a_m)=|a_n-a_m|<1)\,.$$

令 $a=a_{K+1}$. 那么

$$\forall n\in\mathbb{N}\,(K<n\rightarrow d\,(a_n,a)=|a_n-a|<1)\,.$$

因此, $\forall n \in \mathbb{N}\ (K < n \to |a_n| < |a| + 1)$. 令

$$b = \max\left(\{|a_0|, \cdots, |a_K|, |a| + 1\}\right).$$

那么 $\forall n < \omega\ (|a_n| \leqslant b)$.

既然 A 是一个非空有界子集, 根据实数轴的序完备性, 它就有一个上确界 a 和一个下确界 b. 首先我们断言 $a = b$. 如果不然, $b < a$. 令 $\epsilon = \dfrac{a-b}{2}$, 我们就会发现这个序列所持有的后述三种性质相冲突：a 是序列值域的上确界; b 是序列值域的下确界; 该序列是一个柯西序列.

事实上这两个相等的上、下确界 $a = b$ 就是给定的柯西序列的极限 (验证留着练习). □

连续函数的概念则可以用如下在分析中常用的 ϵ-δ 表达方式描述：

定理 3.14　设 I 和 J 是实数轴上的两个区间, $f: I \to J$. 那么 f 是 I 上的一个连续函数当且仅当

$$\forall a \in I\, \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+\, \exists \delta \in \mathbb{R}^+\, \forall x \in I\, (d(a,x) < \delta \to d(f(a), f(x)) < \epsilon).$$

证明　(练习.) □

前面我们说过, 作为拓扑空间, (a,b) 与 $[a,b]$ 有着非常本质的差别, 除了开与闭的差别外, 闭区间 $[a,b]$ 具有紧致性. 下述区间套定理是实数轴上闭区间紧致性的一种特殊情形.

称实数闭区间序列 $\langle [a_n, b_n] :\ n \in \omega \rangle$ 为一个**区间套**当且仅当

$$\forall n \in \omega\, (a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n).$$

定理 3.15 (区间套定理)　对于任意的实数区间套 $\langle [a_n, b_n] :\ n \in \omega \rangle$,

$$\bigcap \{[a_n, b_n] \mid n \in \omega\}$$

一定非空.

证明　设 $\langle [a_n, b_n] :\ n \in \omega \rangle$. 令

$$A = \{a_n \mid n \in \omega\}, \quad B = \{b_n \mid n \in \omega\}.$$

那么 A 有上界 b_0 以及 B 有下界 a_0. 由实数轴的完备性, 令

$$a = \sup(A), \quad b = \inf(B).$$

那么 $[a,b] \subset \bigcap \{[a_n, b_n] \mid n \in \omega\}$. □

称实数轴上的一个由一些非空子集所组成的集合 S **具有有限交性质**当且仅当对于任意的非空有限子集 $A \subseteq S$ 都有 $\bigcap A \neq \varnothing$.

定理 3.16 (紧致性定理) 设 F 为一些有界闭集所组成的具有有限交性质的非空集合. 那么, $\bigcap F \neq \varnothing$.

证明 给定一些实数轴上的有界闭子集的集合 F, 设 F 具有有限交性质, 并且 F 中没有单点闭集. 令

$$A \in F \text{ 以及 } a = \min(A) < b = \max(A) \ .$$

再令 $F_1 = \{A \cap B \mid B \in F\}$. 那么, F_1 是一个具有有限交性质的有界闭子集之非空集合; 每一个 $B \in F_1$ 都是闭区间 $[a, b]$ 的闭子集合, 并且

$$\bigcap F_1 = \bigcap F.$$

我们来证明 $\bigcap F_1$ 非空.

用反证法. 欲得一矛盾, 假设 $\bigcap F_1$ 为空. 因此,

$$\forall x \in [a, b] \ \exists B_x \in F_1 \ (x \notin B_x).$$

对于任意 $x \in [a, b]$, 集合 $[a, b] - B_x = [a, b] \cap (\mathbb{R} - B_x)$ 是一个相对开集, 所以必有一个极大的相对开区间 $x \in I_x \subset ([a, b] - B_x)$. 令

$$\mathscr{A} = \{I_x \mid x \in [a, b]\}.$$

断言 $[a, b]$ 是 $\mathscr{A}$ 中有有限个集合之并.

令 $a_0 = a$, $b_0 = b$.

归纳假设: $\langle a_\gamma < a_\beta < b_\beta < b_\gamma \mid \gamma < \beta < \alpha \rangle$ 以及对于每一个 $\beta < \alpha$,

$$[a, a_\beta] \cup [b_\beta, b]$$

可以被 $\mathscr{A}$ 中的有限个元素之并所覆盖.

设 $\alpha = \beta + 1 < \omega_1$.

令 $a_\alpha = \sup(I_{a_\beta})$ 以及 $b_\alpha = \inf(I_{b_\beta})$.

如果 $[a_\alpha, b_\alpha]$ 被 $I_{a_\alpha} \cup I_{b_\alpha}$ 所覆盖, 则终止递归定义, 并且完成断言之证明; 否则, $a_\beta < a_\alpha < b_\alpha < b_\beta$ 并且

$$[a, a_\alpha] \cup [b_\alpha, b] \subseteq [a, a_\beta] \cup [b_\beta, b] \cup I_{a_\alpha} \cup I_{b_\alpha}$$

以及

$$[a_\alpha, b_\alpha] \not\subseteq I_{a_\alpha} \cup I_{b_\alpha},$$

关于 $\alpha + 1$ 的归纳假设成立, 递归定义可继续.

设 $0<\alpha<\omega_1$ 为一个极限序数.

令 $\langle \alpha_n \mid n<\omega\rangle$ 为一个收敛于 α 的单调递增的序列. 令

$$a_\alpha=\sup(\{a_{\alpha_n}\mid n\in\omega\}),\quad b_\alpha=\inf(\{b_{\alpha_n}\mid n\in\omega\}),$$

那么, $a\leqslant a_{\alpha_n}<a_\alpha\leqslant b_\alpha<b_{\alpha_n}\leqslant b$.

令 $M\in\mathbb{N}$ 足够大以至于

$$a_{\alpha_M}\in I_{a_\alpha},\quad b_{\alpha_M}\in I_{b_\alpha}.$$

根据归纳假设, $[a,a_{\alpha_M}]\cup[b_{\alpha_M},b]$ 可以被 $\mathscr{A}$ 中的有限个元素之并所覆盖, 从而 $[a,a_\alpha]\cup[b_\alpha,b]$ 可以被 $\mathscr{A}$ 中的有限个元素之并所覆盖.

如果 $[a_\alpha,b_\alpha]\subset I_{a_\alpha}\cup I_{b_\alpha}$, 那么, $[a,b]$ 可以被 $\mathscr{A}$ 中的有限个元素之并所覆盖, 从而终止递归定义, 并且完成断言之证明.

如果 $[a_\alpha,b_\alpha]\not\subseteq I_{a_\alpha}\cup I_{b_\alpha}$, 那么, 关于序数 $\alpha+1$ 的归纳假设成立, 递归定义可继续.

事实上, 上述递归定义一定在某个 $\alpha<\omega_1$ 上终止. 因为如若不然, 我们就得到一个长度为 ω_1 的严格单调递增的实数序列 $\langle a_\alpha\mid\alpha\in\omega_1\rangle$. 我们知道这是不可能的.

断言由此得证.

根据上述断言, 令 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$ 见证

$$[a,b]\subseteq I_{x_1}\cup I_{x_2}\cup\cdots\cup I_{x_n}.$$

另一方面, $I_{x_i}\subseteq([a,b]-B_{x_i})$ 以及

$$\bigcup_{i=1}^n I_{x_i}\subseteq\bigcup_{i=1}^n([a,b]-B_{x_i})=[a,b]-\left(\bigcap_{i=1}^n B_{x_i}\right)\neq[a,b].$$

这就是一个矛盾. □

3.5 实数子集正则性

3.5.1 贝尔性质

定义 3.16 称 $A\subseteq\mathbb{R}$ 为一个**稠密子集**当且仅当 A 与实数轴上的每一个非空开集都有非空交.

称 $A\subset\mathbb{R}$ 为一个**无处稠密子集**当且仅当 $(\bar{A})^\circ=\varnothing$, 即 A 的闭包的内集是空集, 当且仅当 $\mathbb{R}-\bar{A}$ 是一个稠密开子集.

称 $A\subset\mathbb{R}$ 为一个**稀疏子集** (也称为**第一纲子集**) 当且仅当 A 是可数个无处稠密子集的并.

例 3.2 (1) 有理数集合 $\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个稠密子集. 因此, 实数轴在序拓扑下是**一个可分拓扑空间**, 即它有一个**可数稠密子集**.

(2) 整数集合 $\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个无处稠密闭集; $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ 是一个稠密开集.

一个自然的问题就是: 整个实数是否为一个稀疏集合?

定理 3.17 (贝尔纲定理) 设 $\langle D_n \mid n<\omega\rangle$ 是实数轴上的一个稠密开集序列. 那么它们的交集

$$D=\bigcap_{n<\omega} D_n$$

在实数轴上稠密.

证明 给定稠密开集的一个序列 $\langle D_n \mid n<\omega\rangle$, 对于每一个 $n<\omega$, 令

$$B_n=\bigcap_{i\leqslant n} D_i,$$

那么 B_n 也是实数轴上的稠密开集. 所不同的是结果多了一种单调性: 对于 $n<\omega$, $B_{n+1}\subseteq B_n$, 因为

$$D=\bigcap_{n<\omega} B_n.$$

称一个开区间 (a,b) 为一个有理开区间当且仅当 $a<b$ 并且 $\{a,b\}\subset\mathbb{Q}$. 全体有理开区间的集合是一个可数无穷集合. 令

$$\langle J_k=(r_k,q_k) \mid k<\omega\rangle$$

为全体有理开区间的单一列表.

任给一个非空开区间 I, 欲证 $D\cap I\neq\varnothing$. 我们递归地定义一个开区间序列如下: 令 $I_0=I$. 给定开区间 I_n, 因为 B_n 是一个稠密开集, $B_n\cap I_n$ 是一个非空开集, 所以, 必然有一个有理开区间 (r,q) 的闭包 $[r,q]\subset B_n\cap I_n$; 因此, 令

$$m=\min\left\{k<\omega \;\middle|\; \bar{J}_k=[r_k,q_k]\subset B_n\cap I_n\right\},$$

并且令 $I_{n+1}=J_m$.

这样我们得到一个区间套: $\left\langle \bar{I}_n \;\middle|\; 1\leqslant n<\omega\right\rangle$. 根据区间套定理 (定理 3.15),

$$\bigcap_{1\leqslant n<\omega} \bar{I}_n\neq\varnothing.$$

由不等式 $D\cap I\supset \bigcap_{1\leqslant n<\omega} \bar{I}_n$ 我们得知 $D\cap I\neq\varnothing$. □

推论 3.2 如果 $a<b$ 是两个实数, 那么开区间 (a,b) 不是一个稀疏子集, 因此所有非空开子集都不是稀疏子集.

证明 既可以利用 (a,b) 与 $\mathbb{R}$ 拓扑同胚这个事实以及无处稠密性质是一个拓扑性质直接由定理 3.17 得到, 也可以直接相对化定理 3.17 的证明得到. □

定义 3.17 令 $\mathcal{I}_c = \{A \subset \mathbb{R} \mid A$ 是一个稀疏子集$\}$. 实数轴上的非稀疏子集也被称为**第二纲子集**.

推论 3.3 实数轴上的全体稀疏子集之集合 $\mathcal{I}_c$ 是一个非平凡的包括了所有单点子集的可数可加理想.

证明 根据贝尔纲定理 (定理 3.17), $\mathbb{R} \notin \mathcal{I}_c$. 所以 $\mathcal{I}_c$ 是一个非平凡的理想. 由于可数个稀疏子集的并依旧是一个稀疏子集, 所以 $\mathcal{I}_c$ 是可数可加理想. □

如果马丁公理 MA_{ω_1} 成立, 那么理想 $\mathcal{I}_C$ 可以具有更强的可加性. 我们现在就来看看这种情形.

定理 3.18 如果 MA_κ 成立, 那么实数轴上势不超过 κ 个稠密开子集的交还是稠密的.

证明 诚如上面实数轴贝尔纲定理 (定理 3.17) 的证明. 唯一需要论证的是, 那里所定义的开区间 (a,b) 上的所有非平凡闭子区间之集 P 在反包含关系之下满足可数反链条件, 而这一点由有理数的稠密性立即得到. □

关于稀疏子集理想的可加性, 我们先看下面的引理:

引理 3.5 假设马丁公理成立. 令 $\kappa < 2^{\aleph_0}$ 为一个无穷基数. 设

$$\langle A_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$$

是无处稠密闭子集的一个序列. 令 $A = \bigcup \{ A_\alpha \mid \alpha < \kappa \}$. 那么一定存在可数个稠密开集

$$\langle H_i \mid i < \omega \rangle$$

来见证等式 $A \cap \bigcap \{ H_i \mid i < \omega \} = \varnothing$.

证明 考虑下述有序对的有限序列的全体之集:

$$\langle (U_0, E_0), (U_1, E_1), \cdots, (U_n, E_n) \rangle \in P$$

当且仅当对于 $i \leqslant n$ 都有

(a) U_i 是有限个以有理数为端点的开区间的并;

(b) $E_i \in [\kappa]^{<\omega}$;

(c) $U_i \cap \bigcup \{ A_\alpha \mid \alpha \in E_i \rangle = \varnothing$.

定义条件

$$p' = \langle (U_0', E_0'), (U_1', E_1'), \cdots, (U_n', E_n') \rangle$$

比条件

$$p = \langle (U_0, E_0), (U_1, E_1), \cdots, (U_n, E_n) \rangle$$

强, $p' \leqslant p$, 当且仅当

(a) $m \geqslant n$;

(b) $\forall i \leqslant n\ (U_i \subset U_i' \wedge E_i \subset E_i')$.

令 $\mathbb{P} = (P, \leqslant)$ 为上述定义的偏序集. 任意两个具有相同的开集序列

$$\langle U_0, U_1, \cdots, U_n \rangle$$

的条件一定不会有冲突, 即它们一定有一个共同的较强条件, 而所有这样的开集序列 $\langle U_0, U_1, \cdots, U_n \rangle$ 只有可数多个, 因此这个偏序集合满足可数链条件.

令 $\{ I_k \mid k < \omega \}$ 为所有以有理数为端点的开区间的单一列表. 对于 $\alpha < \kappa$, $i, k < \omega$, 令

$$C_\alpha = \{ \langle (U_0, E_0), (U_1, E_1), \cdots, (U_n, E_n) \rangle \in P \mid \exists i \leqslant n,\ \alpha \in E_i \},$$
$$D_{i,k} = \{ \langle (U_0, E_0), (U_1, E_1), \cdots, (U_n, E_n) \rangle \in P \mid i \leqslant n \wedge k \leqslant n \wedge (U_i \cap I_k \neq \varnothing) \},$$

由于每一个 $A_\alpha\,(\alpha < \kappa)$ 都是无处稠密闭子集, 对于每一对 $(i, k) \in \omega^2$, 任何 P 中的条件都可以扩展成 $D_{i,k}$ 中的一个条件, 所以, 每一个 $D_{i,k}$ 都是 P 在 $\leqslant$ 下的稠密子集; 同样地, 每一个 C_α 也是稠密子集.

应用马丁公理 MA_κ 到这些稠密子集上, 得到一个 $\mathbb{P}$ 的与上述 C_α 和 $D_{i,k}$ 都有非空交的滤子 G. 对 $i < \omega$, 令

$$H_i = \bigcup \{ U_i \mid \exists p \in G\ (i < \mathrm{dom}(p) \wedge p(i) = (U_i, E_i)) \}.$$

固定 $i < \omega$. 由于对于每一个 $k < \omega$, 都有 $D_{i,k}$ 是稠密的, 因此 H_i 是实数轴上的一个稠密开集.

对于 $\alpha < \kappa$, 由于 C_α 是稠密的, 一定有 $i < \omega$ 来保证 $H_i \cap A_\alpha = \varnothing$. 因此

$$A_\alpha \cap \bigcap \{ H_i \mid i < \omega \} = \varnothing.$$

因此,

$$A \cap \bigcap \{ H_i \mid i < \omega \} = \varnothing. \qquad \square$$

定理 3.19 (Martin-Solovay) 如果马丁公理成立, 那么严格少于 $2^{\aleph_0}$ 个稀疏子集的并依旧还是一个稀疏子集; 如果 $\kappa < 2^{\aleph_0}$ 是一个无穷基数, 并且 MA_κ 成立, 那么 κ 个稀疏子集的并依旧还是一个稀疏子集.

证明 设 $\kappa < 2^{\aleph_0}$ 为一个基数, 并且

$$\langle A_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$$

是稀疏子集的一个序列. 对于每一个 $\alpha<\kappa$, 令

$$A_\alpha=\bigcup\{\,A_{\alpha,n}\mid n<\omega\}\,,$$

其中每一个 $A_{\alpha,n}$ 是一个无处稠密子集. 那么

$$\left\langle\overline{A_{\alpha,n}}\mid\alpha<\kappa,n<\omega\right\rangle$$

是无处稠密闭子集的一个序列. 根据引理 3.5, 令

$$\langle H_i\mid i<\omega\rangle$$

为可数个稠密开集来见证等式

$$\forall\alpha<\kappa\,\forall n<\omega\ \left(\overline{A_{\alpha,n}}\cap\bigcap\{\,H_i\mid i<\omega\}=\varnothing\right).$$

所以, $\bigcup\{\,A_\alpha\mid\alpha<\kappa\}$ 是一个稀疏子集. □

由于每一个非空开集都是第二纲集, 我们自然可以考虑所有那些模稀疏子集理想几乎等于一个开集的实数子集.

定义 3.18 设 $A\subseteq\mathbb{R}$. 称 A 具有**贝尔性质**当且仅当 A 与某个开集的对称差是一个稀疏子集, 即

$$\exists B\in\tau_o\ \left(A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)\in\mathcal{I}_c\right).$$

令 $\mathcal{C}$ 为全体具有贝尔性质的子集所成的集合.

所有具有贝尔性质的子集构成一个 σ-代数.

定义 3.19 设 X 是一个集合. 设 $\mathscr{A}\subseteq\mathfrak{P}(X)$. 称 $\mathscr{A}$ 是 X 上的一个**代数**当且仅当

(1) $X\in\mathscr{A}$;

(2) 如果 $A\in\mathscr{A}$, 那么 $X-A\in\mathscr{A}$;

(3) 如果 $A\in\mathscr{A}$, $B\in\mathscr{A}$, 那么 $A\cup B\in\mathscr{A}$.

称 $\mathscr{A}$ 为 X 上的一个 σ-代数当且仅当它是一个代数, 并且

(4) 如果 $\langle A_n\mid n<\omega\rangle$ 是一个源自 $\mathscr{A}$ 的序列, 那么 $\bigcup\limits_{n<\omega}A_n\in\mathscr{A}$.

定理 3.20 所有具有贝尔性质的子集构成包含全体稀疏子集和全体开集的实数轴上的一个 σ-代数.

证明 首先由定义得知每一个稀疏子集和每一个开集都具备贝尔性质. 其次, 如果 A 是一个开集, 那么 $\bar{A}-A$ 就是一个无处稠密子集. 因此, 如果 A 是一个开集, B 是一个与 A 的对称差为稀疏子集的集合, 那么

$$(\mathbb{R}-B)\triangle\left(\mathbb{R}-\bar{A}\right)=B\triangle\bar{A}$$

就是一个稀疏子集, 从而 $\mathcal{C}$ 关于补运算是封闭的. 最后, 直接计算表明可数个具备贝尔性质的集合之并也具备贝尔性质, 即 $\mathcal{C}$ 关于可数并是封闭的. □

一个自然的问题产生了:

问题 3.2 σ-代数 $\mathcal{C}$ 是否就是整个 $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$?

假设选择公理, 上述问题的答案是否定的. 最典型的反例可以说是实数轴上的维塔利[1]集合, 更多的反例可参见练习 3.6.

定义 3.20 对于实数 $a, b \in \mathbb{R}$, 定义

$$a \equiv b \leftrightarrow (a-b) \in \mathbb{Q}.$$

这是实数轴上的一个等价关系 (验证: 练习). 称 $A \subset \mathbb{R}$ 是一个**维塔利集合**当且仅当

$$\forall x \in \mathbb{R}\ (|[x] \cap A| = 1),$$

即 A 恰好由商空间 $\mathfrak{P}(\mathbb{R})/\equiv$ 中各等价类的一个代表元所组成.

事实 假设选择公理. 那么实数轴上存在维塔利集合, 并且如果 A 是一个维塔利集合, 那么 A 不具备贝尔性质.

这样, 上述问题 3.2 就被修改成下述问题:

问题 3.3 是否存在 "简单" 的不具备贝尔性质的实数子集合?

我们将在本《导引》的最后一章来最终回答这个问题. 但在这里, 我们可以比定义 3.18 以及定理 3.20 走得适当远一点. 先来证明所有实数轴上的博雷尔子集都具备贝尔性质. 在本章的 3.6.3 节中看到更强 (也是在 ZFC 中最好) 的结论.

根据练习 3.2, 我们知道任何集合之上都有一个在关系 $\supseteq$ 之下最小的 σ-代数, 那么在实数轴上也当如此.

定义 3.21 令 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 为实数轴上的最小 σ-代数:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \bigcap \{\mathscr{A} \mid \tau_o \subset \mathscr{A} \wedge \mathscr{A} \text{ 是 } \mathbb{R} \text{ 上的一个 } \sigma\text{-代数}\},$$

称 $B \subseteq \mathbb{R}$ 为一个**博雷尔**子集当且仅当 $B \in \mathcal{B}$.

命题 3.3 实数轴上的每一个博雷尔子集都具备贝尔性质.

证明 根据定义, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}$. □

3.5.2 勒贝格可测性

前面我们应用实数轴上的绝对值函数来定义了实数轴上两个点之间的距离: $d(x, y) = |x-y|$, 从而在这个距离拓扑下我们探讨了实数子集的贝尔特性. 如果换个角度看待这个距离: 将距离解释为区间 (x, y), $[x, y]$, 或者 (y, x), $[y, x]$ 的长度. 这

[1] Vitali.

样我们就有了关于实数轴上一个线段的长度的概念. 如果 A 是实数轴上的一个有界开集, 那么它是一系列不相交的开区间的并：

$$A=\bigcap_{n<\beta} I_n,$$

其中 $\beta \leqslant \omega$. 如果 $\lambda_n=\lambda(I_n)$ 等于区间 I_n 的长度, 那么 $\lambda_n \in \mathbb{R}^+$, 并且所有这些正实数 λ_n 之和应当存在, 于是它们的和

$$\sum_{n<\beta} \lambda_n$$

就理所当然地为 A 的长度 $\lambda(A)$. 依此, 勒贝格引进了实数轴上的勒贝格测度 λ. 由于勒贝格测度理论基本上是实分析课程的必备内容, 再加上本《导引》篇幅所限, 我们将假定读者有足够的实分析勒贝格测度理论基础, 从而很简略扼要地一带而过. 重点在于引出我们所关注的有关实数子集的勒贝格可测性问题.

设 $X \subseteq \mathbb{R}$, 定义 X 的外测度 $\lambda^*(X)$ 如下：

$$\lambda^*(X)=\inf\left(\left\{\sum_{k<\omega}(b_k-a_k)\;\middle|\; X\subseteq\bigcup_{k<\omega}(a_k,b_k)\wedge\langle(a_k,b_k)_<\mid k<\omega\rangle\right\}\right).$$

称 X 为一个**零测度集**当且仅当 $\lambda^*(X)=0$; 称 $A\subseteq\mathbb{R}$ 是**勒贝格可测的**当且仅当

$$\forall X\subseteq\mathbb{R}\,(\lambda^*(X)=\lambda^*(X\cap A)+\lambda^*(X-A)).$$

对于勒贝格可测的子集 $A\subseteq\mathbb{R}$, 令 $\lambda(A)=\lambda^*(A)$, 并且称之为 A 的**勒贝格测度**. 测度论表明：

(1) 每一个区间 $I\subseteq\mathbb{R}$ 都是勒贝格可测的, 并且 I 的勒贝格测度就是它的长度;

(2) 全体勒贝格可测的集合构成一个 σ-代数, 从而每一个博雷尔集都是勒贝格可测的;

(3) 勒贝格测度 λ 具备 σ-可加性：如果 $\{A_n\mid n<\omega\}$ 是一组彼此互不相交的勒贝格可测之集, 那么

$$\lambda\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda(A_n);$$

(4) 勒贝格测度是 σ-有限的：如果 A 是勒贝格可测的, 那么 A 是可数个具有有限勒贝格测度的可测之集的并, 即有一个可测集的序列 $\langle A_n\mid n<\omega\rangle$ 来满足要求：

$$A=\bigcup_{n<\omega}A_n\ \wedge\ (\forall n<\omega\ (\lambda(A_n)<\infty));$$

(5) 每一个零测度子集都是勒贝格可测的; 每一个单点集都是零测度集; 全体零测度子集构成一个 σ-可加的理想;

(6) 如果 A 是可测的, 那么

$$\lambda(A) = \sup\left(\{\lambda(K) \mid K \subseteq A \wedge K \text{是一个紧致集合}\}\right);$$

(7) 如果 A 是可测的, 那么必然存在一个 F_σ 集合 B (即 B 是可数个闭子集的并) 以及一个 G_δ 集合 C (即 C 是可数个开集的交) 来见证如下事实:

$$B \subseteq A \subseteq C \ \wedge\ \lambda^*(C - B) = 0;$$

(8) 对于 $A \subseteq \mathbb{R}$ 而言, A 是勒贝格可测的当且仅当

$$\exists C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\ (\lambda^*(A \triangle C) = 0),$$

其中 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 是实数轴上的博雷尔代数 (定义 3.21), $A \triangle C = (A - C) \cup (C - A)$.

令 $\mathcal{M} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A$ 是勒贝格可测的 $\}$, 以及令 $\mathcal{I}_m = \{A \subset \mathbb{R} \mid \lambda^*(A) = 0\}$. 那么 $\mathcal{M}$ 是一个 σ-代数; 并且每一个博雷尔集合都是勒贝格可测的; $\mathcal{I}_m$ 是一个 σ-可加理想, 称之为**零测集理想**. 再令 $\mathcal{I}_m^b = \{A \in \mathcal{I}_m \mid X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. 那么 $\mathcal{I}_m^b$ 是 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上的一个 σ-可加理想, 其中 $(\mathbb{R})$ 是定义 3.21 中定义的实数轴上的博雷尔代数.

同样自然的问题产生了:

问题 3.4 *σ-代数 $\mathcal{M}$ 是否就是整个 $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$?*

假设选择公理, 上述问题的答案是否定的. 最典型的反例依旧实数轴上的维塔利集合 (见练习 3.4).

这样, 上述问题 3.4 就被修改成下述问题:

问题 3.5 *是否存在 "简单" 的勒贝格不可测的实数子集合?*

我们也将在本《导引》的最后一章来最终回答这个问题. 但在这里, 可以也可以走得适当远一点. 在本章的 3.6.3 节中我们将会看到更强 (也是在 ZFC 中最好) 的结论.

与稀疏子集理想情况类似, 在马丁公理之下, 零测集理想也有更强的可加性.

定理 3.21 (Martin-Solovay) *如果马丁公理成立, 那么严格少于 $2^{\aleph_0}$ 个零测集之并还是一个零测集; 如果 $\kappa < 2^{\aleph_0}$ 是一个无穷基数, 并且 MA_κ 成立, 那么 κ 个零测集之并还是一个零测集.*

证明 设 $\kappa < 2^{\aleph_0}$ 是一个无穷基数, 并且 MA_κ 成立. 设

$$\langle A_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$$

是零测集的一个序列. 令 $A = \bigcup\{A_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$. 欲证 A 是一个零测集, 我们来证明: 对于任意的正实数 ϵ, 存在一个覆盖 A 的勒贝格测度不超过 ϵ 的开集 U.

给定实数 $\epsilon > 0$. 我们应用马丁公理 MA_κ 来得到所需要的开集 U. 为此, 令

$$P = \{p \subset \mathbb{R} \mid p \text{ 是一个开集, 并且 } \mu(p) < \epsilon\}.$$

对于 $p, q \in P$, 定义 $p \leqslant q$ (p 比 q 强) 当且仅当 $p \supset q$. 令 $\mathbb{P} = (P, \leqslant)$.

断言 $\mathbb{P}$ 满足可数链条件.

我们来证明：如果 $W \subset P$ 不可数, 那么必存在 $p, q \in W$ $(p \neq q \wedge \mu(p \cup q) < \epsilon)$.

令 $\{ I_k \mid k < \omega\}$ 为所有以有理数为端点的开区间的单一列表. 令

$$S = \left\{ \bigcup_{k \in F} I_k \;\middle|\; F \in [\omega]^{<\omega} \right\}.$$

令 $B = \left\{ n < \omega \;\middle|\; \dfrac{1}{n} < \epsilon \right\}$.

设 $W \subset P$ 不可数. 对于每一个 $p \in W$, $\exists n \in B \left(\mu(p) < \epsilon - \dfrac{1}{n}\right)$. 于是,

$$\exists n \in B\, \exists Z \subset W \left(|W| = |Z| \wedge \forall p \in Z \left(\mu(p) < \epsilon - \frac{1}{n} \right) \right).$$

固定这样的一个 $n \in B$ 以及一个 $Z \subset W$. 对于 $p \in Z$, 令 $p^* \in S$ 来满足不等式 $p^* \subset p$ 以及 $\mu(p - p^*) < \dfrac{1}{n}$. 由于 S 可数, Z 中必然有 $p \neq q$ 满足 $p^* = q^*$. 从 Z 中取出这样两个不相等的开集 p 和 q. 那么

$$\mu(p \cup q) \leqslant \mu\left(p - p^*\right) + \mu\left(q - p^*\right) + \mu\left(p^*\right) \leqslant \frac{1}{n} + \mu(q) < \epsilon.$$

因此, $p \cup q \in P$ 就是比 p 和 q 都强的条件.

断言由此得证.

对于 $\alpha < \kappa$, 令 $D_\alpha = \{p \in P \mid A_\alpha \subset p\}$. 我们来验证这些 D_α 都是 $\mathbb{P}$ 的稠密子集：设 $p \in P$. 由于 A_α 是零测集, 必存在一个开集 $q \supset A_\alpha$ 来满足不等式 $\mu(p) + \mu(q) < \epsilon$. 任取一个这样的 q, 我们便有

$$p \subset p \cup q \in D_\alpha.$$

现在将 MA_κ 应用到这些稠密子集上. 令 $G \subset P$ 为一个与所有这些 D_α 都有非空交的滤子. 令 $U = \bigcup G$. 此 U 是一个开集, 并且 $A \subset U$. 剩下的工作是验证: $\mu(U) \leqslant \epsilon$.

首先很容易验证：存在 G 的一个可数子集 H 来实现等式 $U = \bigcup H$. 这样, 如果 $\mu(U) > \epsilon$, 那么就可以在 H 中找到有限个元素 $p_1, \cdots, p_n$ 来实现不等式

$$\mu\left(p_1 \cup \cdots \cup p_n\right) > \epsilon;$$

但是, $H \subset G$, G 是一个滤子, 集合 $p_1 \cup \cdots \cup p_n \in G$, 这就意味着

$$\mu(p_1 \cup \cdots \cup p_n) < \epsilon;$$

从而就得到一个矛盾. 因此, $\mu(U) \leqslant \epsilon$. □

推论 3.4　设 MA_κ 成立. 设 $\kappa < 2^{\aleph_0}$ 是一个无穷基数. 如果

$$\langle A_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$$

是互不相交的勒贝格可测集的一个序列. 那么

$$\mu\left(\bigcup\{A_\alpha \mid \alpha < \kappa\}\right) = \sum_{\alpha<\kappa} \mu(A_\alpha),$$

从而任何 κ 个勒贝格可测集之并也是勒贝格可测集.

证明　设 $\langle A_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ 是互不相交的勒贝格可测集的一个序列. 令

$$X = \{\alpha < \kappa \mid \mu(A_\alpha) > 0\}.$$

那么 X 必然是一个可数集合. 令

$$A = \bigcup\{A_\alpha \mid \alpha \in (\kappa - X)\}.$$

根据定理 3.21, A 是一个零测集. 根据勒贝格测度的可数可加性,

$$\mu\left(\bigcup\{A_\alpha \mid \alpha \in X\}\right) = \sum_{\alpha\in X} \mu(A_\alpha)$$

以及

$$\begin{aligned}&\mu\left(\left(\bigcup\{A_\alpha \mid \alpha \in X\}\right) \cup \left(\bigcup\{A_\alpha \mid \alpha \in (\kappa - X)\}\right)\right)\\ =&\,\mu\left(\bigcup\{A_\alpha \mid \alpha \in X\}\right) + \mu\left(\bigcup\{A_\alpha \mid \alpha \in (\kappa - X)\}\right),\end{aligned}$$

我们就得到所要的等式.

我们用关于无穷基数 $\kappa < 2^{\aleph_0}$ 的归纳法来证明推论中最后的结论. 当 $\kappa = \aleph_0$ 时, 结论是勒贝格测度的基本性质. 现在假设对于所有小于 κ 的无穷基数结论都成立. 设

$$\langle A_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$$

是勒贝格可测集的一个序列. 对于 $\alpha < \kappa$, 令

$$B_\alpha = A_\alpha - \left(\bigcup\{A_\beta \mid \beta < \alpha\}\right),$$

那么依据归纳假设, 对于 $\alpha < \kappa$, B_α 都是可测集, 而序列

$$\langle B_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$$

是彼此互不相交的勒贝格可测集的序列. 因此, 它们中间测度不为零的集合的个数不会超过 $\aleph_0$, 这就表明

$$A = \bigcup \{ B_\alpha \mid \alpha < \kappa \}$$

是一个勒贝格可测集. □

3.5.3 完备子集特性

接下来回到连续统问题. 这里围绕确定实数闭子集的势的大小问题展开分析. 我们将主要探讨不可数实数闭子集是否包含完备子集问题. 对于更为复杂实数子集势的大小确定问题以及连续统假设问题的讨论留到后面再继续.

定义 3.22 称 $A \subseteq \mathbb{R}$ 为一个**完备集**当且仅当 A 是一个没有孤立点的非空闭集. 这里, 一个点 $a \in A$ 被称为 A 的一个**孤立点**当且仅当存在一个满足等式 $I \cap A = \{a\}$ 的开区间.

例 3.3 每一个非空闭区间都是一个完备集合. 我们将证明每一个不可数的闭子集都含有一个完备子集.

我们现在来看著名的康托尔 (三分) 集例子.

例 3.4 康托尔三分集:

应用二叉树 $(\mathrm{Seq}(\{0,1\}), <)$, 我们递归地定义一个从 $\mathrm{Seq}(\{0,1\})$ 到闭区间 $[0,1]$ 的非平凡闭子区间之集 $\mathscr{F}$ 的单射:

$$\mathrm{Seq}(\{0,1\}) \ni s \mapsto P_s \in \mathscr{F}.$$

$P_\varnothing = [0,1]$.

$P_{<0>} = \left[0, \frac{1}{3}\right]$, $P_{<1>} = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$.

$P_{<00>} = \left[0, \frac{1}{9}\right]$, $P_{<01>} = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$, $P_{<10>} = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$, $P_{<11>} = \left[\frac{8}{9}, 1\right]$.

......

一般地, 给定 $P_s = [a,b]$, 令

$$P_{s<0>} = \left[a, a + \frac{1}{3}(b-a)\right] \text{ 和 } P_{s<1>} = \left[a + \frac{2}{3}(b-a), b\right].$$

对于 $n \in \omega$, 令 $F_n = \bigcup\{P_s \mid s \in 2^n\}$. 每一个 F_n 都是有限个不相交的闭区间的并, 因此都是一个闭集. 如果 $m > n$, 那么 $F_m \subset F_n$. 从而, $\mathbf{C} = \bigcap\{F_n \mid n < \omega\}$ 是一个闭集.

事实一 $\mathbf{C}$ 的势为 $2^{\aleph_0}$.

对每一个 $f \in 2^\omega$, 如果 $m < n < \omega$, 那么 $P_{f\restriction n} \subset P_{f\restriction m}$. 因此, 由区间套定理 (定理 3.15), 交集

$$\bigcap\{P_{f\restriction n} \mid n < \omega\}$$

非空. 由于每一个区间 $P_{f\restriction n}$ 的长度是 $\frac{1}{3^n}$, 这一交集含有恰好一个元素. 我们就将这一元素记成 d_f.

这就定义了一个从 2^ω 到 $\mathbf{C}$ 上的单射. 实际上, 这也是一个满射. 对于 $a \in \mathbf{C}$, 令

$$f = \bigcup\{s \in \mathrm{Seq}(\{0,1\}) \mid a \in P_s\}.$$

那么, $a = d_f$.

事实二 $\mathbf{C}$ 是一个完备集.

我们只需检测 $\mathbf{C}$ 没有孤立点.

取 $a \in \mathbf{C}$. 令 $\delta > 0$. 我们需要找一个满足不等式 $|a - x| < \delta$ 的 $x \in \mathbf{C}$.

令 $n \in \omega$ 为满足不等式 $\frac{1}{3^n} < \delta$ 的一个解. 令 $f \in 2^\omega$ 为方程 $a = d_f$ 的唯一解. 再令 $g \in 2^\omega$ 为满足方程 $f \restriction n = g \restriction n$ 和不等式 $f \neq g$ 的一个解. 那么, $|d_f - d_g| \leqslant \frac{1}{3^n} < \delta$. □

现在我们来继续讨论连续统问题: 什么样的实数集合具有连续统势? 或者什么样的实数集合可能是连续统假设的反例?

定理 3.22 每一个完备实数集合的势都是 $2^{\aleph_0}$.

我们先来证明几个引理.

引理 3.6 如果 F 是一个完备集, 那么必有满足三个要求

$$r < s \wedge F \cap (-\infty, r] \wedge F \cap [s, +\infty)$$

同时为完备集的一对有理数 r 和 s.

证明 令 $\alpha = \inf(F)$, $\beta = \sup(F)$. 如果区间 $(\alpha, \beta) \subseteq F$, 那么在 α 和 β 之间的任何一对满足 $r < s$ 的有理数都行; 否则, 令 $a \in (\alpha, \beta)$ 满足 $a \notin F$. 因为 F 是一闭集, 可取一 $\delta > 0$ 来满足 $(a - \delta, a + \delta) \cap F = \varnothing$. 再取一对有理数 r, s 来满足 $a - \delta < r < s < a + \delta$. 那么这样一对有理数就可以满足要求. □

引理 3.7 令 $\mathbb{P}$ 为实数轴上的全体完备子集合所成的集合. 那么, 存在两个满足两项要求的函数 $G_0, G_1 : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$:

$$G_i(p) \subseteq p \quad \text{和} \quad G_0(p) \cap G_1(p) = \varnothing.$$

证明 令 $\{(r_n, s_n) \mid n < \omega\} = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ 为全体有理数的有序对的一个列表.

对于 $p \in \mathbb{P}$, 令 n 为满足要求 $r_n < s_n$ 以及 $p \cap (-\infty, r_n]$ 和 $p \cap [s_n, +\infty)$ 同为完备集合的最小自然数. 再定义 $G_0(p) = p \cap (-\infty, r_n]$ 以及 $G_1(p) = p \cap [s_n, +\infty)$. □

对于一个实数的有界集合 $A \subseteq \mathbb{R}$, 我们定义 $\mathrm{diam}(A) = \sup(A) - \inf(A)$.

引理 3.8 *存在一个满足如下两组要求的函数* $H : \mathbb{P} \times \mathbb{N} \to \mathbb{P}$:

(1) $H(p, n) \subseteq p$;

(2) $\mathrm{diam}(H(p, n)) \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

证明 对于 $n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P}$, 一定有一个整数 m 满足如下方程

$$\left(\frac{m}{n+1}, \frac{m+1}{n+1}\right) \cap p \neq \varnothing.$$

如果这一方程有一个自然数解, 则取最小的自然数解; 否则, 取方程的最大负整数解. 无论如何, 我们将其记成 $m = m(n, p)$. 令 $a = \inf\left(\left(\frac{m}{n+1}, \frac{m+1}{n+1}\right) \cap p\right)$ 以及 $b = \sup\left(\left(\frac{m}{n+1}, \frac{m+1}{n+1}\right) \cap p\right)$. 那么,

$$0 < b - a \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

最后, 我们定义 $H(p, n) = p \cap [a, b]$. 这一交集是一个完备集. □

现在回头证明我们的定理.

令 F 为一个完备集合. 我们知道 $|F| \leqslant 2^{\aleph_0}$, 只需证明 $|F| \geqslant 2^{\aleph_0}$.

沿用康托尔三分集的构造方法来构造我们所要的单射. 对于每一个

$$s \in \mathrm{Seq}(\{0, 1\}),$$

我们递归地定义完备集合 $F \supseteq F_s \supseteq F_{s<0>} \cup F_{s<1>}$, 并且

$$F_{s<0>} \cap F_{s<1>} = \varnothing$$

以及

$$\mathrm{diam}(F_{s<i>}) < \frac{1}{\mathrm{dom}(s) + 1} \ (i \in \{0, 1\}) \ .$$

令 $F_{<>} = F$.

现在假定对于任何一个 $s \in 2^n$, 我们已经定义好了 F_s. 我们希望对于每一个 $\sigma \in 2^{n+1}$ 来定义 F_σ.

这一工作由如下定义式来完成: 任取一个 $s \in 2^n$, 定义

$$F_{s<0>} = H(G_0(F_s), n) \subset F_s, \ F_{s<1>} = H(G_1(F_s), n) \subset F_s.$$

那么, $F_{s<0>} \cap F_{s<1>} = \varnothing$ 以及 $\operatorname{diam}(F_{s<i>}) < \dfrac{1}{\operatorname{dom}(s)+1}\,(i \in \{0,1\})$.

对于 $f \in 2^\omega$, 如果 $n < m < \omega$, 那么 $F_{f\restriction m} \subset F_{f\restriction n}$ 以及

$$\operatorname{diam}(F_{f\restriction m}) < \frac{1}{m+1}\ .$$

由实数轴的有界闭区间上的紧致性定理,

$$F_f = \bigcap\{F_{f\restriction n} \mid n < \omega\}$$

为一个非空子集. 因此 $|F_f| = 1$. 将 F_f 中的唯一元素记成 d_f.

这就定义了一个从 2^ω 到 F 上的一个单射. 因此, $|F| \geqslant 2^{\aleph_0}$.

定理由此得证. □

现在我们来证明没有闭集会是连续统假设的反例.

定理 3.23 (完备集定理) 每一个不可数的闭集都含有一个完备子集, 从而, 每一个闭集或者可数或者势为 $2^{\aleph_0}$.

设 A 为实数的一个集合. 称 a 为 A 的一个**凝聚点**当且仅当对于任意的 $\delta > 0$, 集合

$$\{x \in A \mid |x-a| < \delta\}$$

都是不可数的. 我们用 A^* 来记集合 A 的全体凝聚点的集合. 又称 a 为 A 的**极限点**当且仅当对于任意正实数 δ , 都有 $x \in A$ 来满足不等式 $0 < |x-a| < \delta$. 用 A' 来记 A 的极限点的集合. 从而 $A^* \subseteq A'$. A' 被称为 A 的导出集.

引理 3.9 对于 $A \subseteq \mathbb{R}$ 来说, A 是闭的当且仅当 A 的每一个极限点都在 A 中.

证明 假设 A 为闭集, 设 $a \notin A$. 我们往证 a 不是 A 的极限点. 因为 $\mathbb{R} - A$ 是一开集, 存在一个 $\delta > 0$ 满足不等式 $(a-\delta, a+\delta) \subseteq \mathbb{R} - A$. 这表明 a 不是 A 的极限点.

反之, 设 $a \in \mathbb{R} - A$, 那么 a 不是 A 的一个极限点. 因此, 存在 $\delta > 0$ 满足方程 $(a-\delta, a+\delta) \cap A = \varnothing$, 这表明 $\mathbb{R} - A$, 是一个开集. □

引理 3.10 对于任意的 $A \subseteq \mathbb{R}$, A^* 都是闭集.

证明 欲证 A^* 为闭集, 我们只需验证 A^* 的每一个极限点都在 A^* 之中.

现设 a 为 A^* 的一个极限点. 我们来验证 a 是 A 的一个凝聚点. 为此, 任取 $\delta > 0$. 由于 a 是 A^* 的一个极限点, A^* 中必有不等式方程 $0 < |x-a| < \delta$ 的一个解. 将这样一个解仍记成 x . 令 $\epsilon = \delta - |x-a|$. 由于 x 是 A 的一个凝聚点, 集合

$$B = \{y \in A \mid |x-y| < \epsilon\}$$

是一个不可数集合.

由于每一个 $y \in B$ 都满足不等式 $|y-a| < \delta$, 可见 a 的确是 A 的一个凝聚点. 所以, $a \in A^*$.

这就证明了 A^* 是一个闭集. □

引理 3.11 如果 F 是一个闭集, 那么 $F^* \subseteq F$ 而且 $F - F^*$ 至多可数.

证明 因为 F 是一闭集, 它的每一个凝聚点又都是它的一个极限点, 所以 $F^* \subseteq F$.

令 $B = \{(r,s) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \; : \; r < s, \; |F \cap (r,s)| < \aleph_1\}$.

那么, $F - F^* \subseteq \bigcup\{F \cap (r,s) \mid (r,s) \in B\}$. 由可数选择公理, 可数个可数集合之并仍可数, $F - F^*$ 至多可数. □

引理 3.12 如果 F 是实数的一个不可数闭集, 那么 F^* 是一个完备集.

证明 我们已经见到 F^* 是一个闭集, 而且 $F - F^*$ 至多可数. 因此, 如果 F 不可数, 那么 F^* 必然非空. 我们只需验证 F^* 不含有孤立点.

假设不然. 令 $a \in F^*$ 为 F^* 一个的孤立点. 取 $\delta > 0$ 为方程

$$(a-\delta, a+\delta) \cap F^* = \{a\}$$

的一个解. 但是这样以来, $(a-\delta, a+\delta) \cap F$ 就至多可数. 这与 a 是 F 的凝聚点相矛盾. □

综合上述引理, 我们就得到完备集定理 (定理 3.23) 的证明.

现在我们应用极限点的概念来给出实数闭区间的紧致定理 (定理 3.16) 的第二个证明:

设 F 为一些具有有限交性质的非空有界闭集的集合. 令

$$F_1 = \left\{ \bigcap E \;\middle|\; E \in [F]^{<\omega} \wedge E \neq \varnothing \right\},$$

那么, F_1 中的每一个元素都是一个有界非空闭集; F_1 也具备有限交性质; F_1 关于有限交是封闭的, 并且

$$\bigcap F_1 = \bigcap F.$$

因而, 只需证明 $\varnothing \neq \bigcap F_1$.

令 $A = \{\inf(B) \mid B \in F_1\}$. 任取一个 $G \in F_1$. 对于任意的 $B \in F_1$,

$$G \cap B \in F_1,$$

从而

$$\inf(B) \leqslant \inf(G \cap B) \leqslant \sup(G \cap B) \leqslant \sup(G).$$

这就表明 A 有上界 $\sup(G)$. 根据实数轴的完备性, 令 $d = \sup(A)$.

断言 *如果 $B \in F_1$, 那么 $d \in B$.*

假设不然, 令 $B \in F_1$ 为一个反例, 即 $d \notin B$.

往证: d 是 B 的一个极限点. 这便是一个期望中的矛盾, 因为 B 是一个非空闭集, 它的每一个极限点都是它的元素.

设 $\delta > 0$ 是任意正实数. 取 $H \in F_1$ 满足要求

$$d - \delta < \inf(H) \leqslant d.$$

由于 $H \cap B \in F_1$, $\inf(H) \leqslant \inf(H \cap B) \leqslant d$. 于是,

$$d - \delta < \inf(H \cap B) \leqslant d < d + \delta.$$

取 $x \in H \cap B$ 满足 $\inf(H \cap B) \leqslant x < d + \delta$. 因此,

$$(d - \delta) < x < (d + \delta \ \wedge \ x \neq d).$$

由此我们得到: d 是 B 的一个极限点.

上述断言由此得证. □

现在来看一下康托尔给闭集 "求导" 的过程.

设 A 为一个闭集. 递归地, 我们定义 A 的第 $\alpha < \omega_1$ 次导出集:

$A^{(0)} = A$;

$A^{(\alpha+1)} = (A^{(\alpha)})'$;

$A^{(\lambda)} = \bigcap\{A^{(\alpha)} \mid \alpha < \lambda\}$, 当 λ 是一个极限序数.

也就是说, 一步一步地我们不断地将所论集合的孤立点去掉, 那么最终能够剩下的就应当是 A 的凝聚点的全体. 这便是序数被引进来的最初的一种激励.

上述定理可以得到进一步的加强: 比如, 每一个不可数的博雷尔集合都含有一个完备子集; 每一个不可数的解析集合都含有一个完备子集. 这是在 ZFC 系统下所能得到的最佳结果. 当然, 在本《导引》的最后一章之中, 我们会看到在大基数假设之下, 每一个不可数的射影集合都含有一个完备子集.

问题 3.6 *是否所有不可数实数集都含有一个非空完备子集呢?*

下面的定理表明在假设选择公理的条件下, 这一问题的答案是否定的.

定理 3.24 *假定选择公理. 那么存在与整个实数集合等势但不包含任何非空完备子集合的实数集合.*

证明 令 $\langle P_\alpha \mid \alpha < 2^{\aleph_0}\rangle$ 为全体非空完备实数子集的一个完全列表. 又令 $P_\alpha = \langle a^\alpha_\beta \mid \beta < 2^{\aleph_0}\rangle$ 为第 α 个非空完备实数子集中的全体实数的一个单一完全列表. 我们递归地定义长度为 $2^{\aleph_0}$ 的两个彼此不相交的实数的序列如下:

$$b_0 = a^0_0, \quad c_0 = a^0_1.$$

假设 $\alpha < 2^{\aleph_0}$ 而且对于 $\gamma < \alpha$, b_γ 和 c_γ 都已经定义好了. 令 β_0 为满足后面要求的最小的序数 β:

$$a^\alpha_\beta \in P_\alpha - \{b_\gamma, c_\gamma \mid \gamma < \alpha\},$$

再令 β_1 为满足后面要求的最小的序数 β:

$$a^\alpha_\beta \in P_\alpha - \{a^\alpha_{\beta_0}, b_\gamma, c_\gamma \mid \gamma < \alpha\},$$

最后我们定义 $b_\alpha = a^\alpha_{\beta_0}, c_\alpha = a^\alpha_{\beta_1}$.

令 $A = \{b_\alpha \mid \alpha < 2^{\aleph_0}\}$, $B = \{c_\alpha \mid \alpha < 2^{\aleph_0}\}$. 那么, 它们都与整个实数集合等势, 彼此无共同元素, 而且都与每一个非空完备集合有非空的交. 所以, 它们都不包含任何非空完备实数子集. □

于是, 上述问题 3.6 也就被修改成下述问题:

问题 3.7 是否所有"简单"不可数实数集都含有一个非空完备子集呢?

和前面所探讨的贝尔性质与勒贝格可测性一样, 我们将在本《导引》最后一章给出终极答案. 稍后在 3.6.3 节中我们将证明在理论 ZFC 中可以得到的最好结论.

3.6 贝尔空间与波兰空间

为了分析实数轴上比博雷尔子集略微复杂一点的, 但依旧很简单的子集合的正则性, 我们将引进贝尔空间以及对实数作出新的有益的解释. 前面我们见到过 $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ 实际上是树 $(\mathbb{N}^{<\omega}, <)$ 的树枝的集合; 并且存在一个从 $\mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ 的可以简单定义的双射. 这就意味着集合 $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ 有着比 $\mathbb{R}$ 更优越的探讨条件, 因为并没有从 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的可以简单定义的双射.

定义 3.23 对于 $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, 令

$$N_s = \left\{ f \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \;\middle|\; s \subset f \right\} = \left\{ f \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \;\middle|\; \forall i < \mathrm{dom}(s)\, (f(i) = s(i)) \right\}.$$

称 N_s 为**由序列 s 所确定的基本开集**.

称 $X \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ 为一个**开集**当且仅当 $\forall f \in X\ \exists s \in \mathbb{N}^{<\omega}\ (f \in N_s \subset X)$.

令 $\mathcal{T} = \left\{ X \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \;\middle|\; X \text{ 是一个开集} \right\}$.

称 $X \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ 为一个**闭集**当且仅当 $\left(\mathbb{N}^\mathbb{N} - X\right)$ 是一个开集.

称 $X \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ 为一个**正则开集**当且仅当 X 既是一个开集, 也是一个闭集.

命题 3.4 $\mathcal{T}$ 是 $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ 上的一个**拓扑**: $\left\{\varnothing, \mathbb{N}^\mathbb{N}\right\} \subset \mathcal{T}$; 它的任意子集之并是一个开集; 它的任意非空有限子集之交是一个开集. 全体基本开集之集合是这个拓扑的**一组基**: 任意一个开集都是若干个基本开集之并.

每一个基本开集 N_s 都是一个正则开集; 有限个基本开集之并及其补集也是正则开集.

称拓扑空间 $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \mathcal{T})$ 为**贝尔空间**, 用记号 $\mathcal{N}$ 来记这个拓扑空间, 或者简单地, $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

定义 3.24 对于 $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 若 $f \neq g$, 则令

$$\triangle(f, g) = \min(\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq g(n)\}),$$

以及

$$d(f, g) = \frac{1}{2^{\triangle(f,g)+1}}.$$

对于 $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 令

$$f <_{\mathrm{zd}} g \leftrightarrow (f \neq g \wedge f(\triangle(f, g)) < g(\triangle(f, g))).$$

命题 3.5 $d : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ 是 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 上的一个距离函数, 并且由 d 所诱导出来的拓扑与 $\mathcal{T}$ 重合, 从而贝尔空间 $\mathcal{N}$ 是一个可分完备距离空间.

$<_{\mathrm{zd}}$ 是 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 上的一个线性序 (被称为**字典序**).

证明 我们来证明 $(\mathcal{N}, d)$ 是一个可分完备距离空间, 而将其他结论的证明留给读者. 这里的可分性是指存在一个可数的处处稠密的子集合, 处处稠密性是指与任何非空开集都有非空交; 完备性是指任何柯西序列都有极限 (都收敛).

$\mathcal{N}$ 是可分空间: 它的那些最终平坦的函数的全体 D 构成一个处处稠密的可数子集, 其中

$$D = \{f \in \mathcal{N} \mid \exists m \in \mathbb{N}\, \exists k \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}\, (k \leqslant n \to f(n) = m)\}.$$

D 是可数的, 因为 $|D| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}^{<\omega}|$, D 在 $\mathcal{N}$ 中处处稠密, 因为若 $A \subset \mathcal{N}$ 是一个非空开集, 令 $N_s \subseteq A$ 为一个基本开集, 其中 $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$. 定义 $f_s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 如下: 对于 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$f_s(n) = \begin{cases} s(n) & \text{如果 } n < \mathrm{dom}(s), \\ 0 & \text{如果 } n \geqslant \mathrm{dom}(s). \end{cases}$$

那么 $f_s \in N_s \cap D$.

$\mathcal{N}$ 是完备的: 它上面的任何柯西序列都有极限. 为此, 设 $\langle f_n \mid n < \omega \rangle$ 为贝尔空间中的一个柯西序列, 即

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \exists a \in \mathbb{N}\, \forall m \geqslant a\, \forall k \geqslant a \left(d(f_m, f_k) < \frac{1}{n+1} \right).$$

对于 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$a_n = \min \left\{ a \in \mathbb{N} \;\middle|\; \begin{array}{l} a > n \wedge a > \max\{a_0, \cdots, a_{n-1}\} \wedge \\ \left(\forall m \geqslant a\, \forall k \geqslant a \left(d(f_m, f_k) < \dfrac{1}{n+1} \right) \right) \end{array} \right\}.$$

这是一个单调递增的自然数序列. 对于每一个自然数 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$I_n = \{i \in \mathbb{N} \mid a_n \leqslant i < a_{n+1}\}.$$

这样, 我们得到一个彼此互不相交的自然数非空集合的序列, 并且它们的并覆盖整个自然数集合. 现在我们利用这个 $\mathbb{N}$ 的划分序列来定义所给定的柯西序列的极限函数 f:

$$f = \bigcup \{(f_{a_n}) \upharpoonright_{I_n} \mid n < \omega\}.$$

那么 f 就是柯西序列 $\langle f_n \mid n < \omega\rangle$ 的极限:

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \exists a \in \mathbb{N}\, \forall m \geqslant a \left(d(f_m, f) < \frac{1}{n+1}\right). \qquad \square$$

这与我们在前面引进的实数轴 $\mathbb{R}$ 上拓扑有可比之处. 在实数轴上, 我们先依据序的大小引进了开区间的概念, 从而得到一个实数轴上的序拓扑; 然后又定义了实数轴上的距离函数: $d(x,y) = |x-y|$, 以及由此距离函数所确定的距离拓扑; 最后证明它们给出同一个拓扑 (定理 3.12). 在这个拓扑结构下, 实数轴是一个可分完备距离空间 (定理 3.13). 练习 3.5 表明这两个空间几乎同一: 贝尔空间与全体无理数子空间拓扑同胚.

正是基于这样的理由, 将称贝尔空间中的元素为 "实数", 只是并不再怎么关心这些 "实数" 的算术性质, 我们所关注的将是实数子集合的正则特性, 或者那些 "可定义" 的子集合的正则特性.

利用贝尔空间上的拓扑, 同样可以在贝尔空间上引进稠密子集的概念、无处稠密子集的概念以及稀疏子集的概念. 我们将它们各自严格的定义留给读者, 也有贝尔空间上的贝尔纲定理:

定理 3.25 (贝尔纲定理) 设 $\langle D_n \mid n < \omega\rangle$ 是贝尔空间上的一个稠密开集序列, 那么它们的交集

$$D = \bigcap_{n<\omega} D_n$$

在贝尔空间上稠密.

证明 与实数轴上贝尔纲定理证明唯一的差别在于我们在这里要考虑的是基本开集 $N_s (s \in \omega^{<\omega})$, 而不是那里的有理开区间. 基于同样的理由, 我们不妨假设 $D_{n+1} \subseteq D_n$. 给定 N_s, 我们递归地定义 $\omega^{<\omega}$ 中的 $\leqslant$-单调递增序列: $s_0 = s$. 给定 s_n, 考虑 $D_n \cap N_{s_n}$. 根据假设, 令 $N_{s_{n+1}} \subset D_n \cap N_{s_n}$, 并且 $\operatorname{dom}(s_n) < \operatorname{dom}(s_{n+1})$. 最后令

$$f = \bigcup_{n<\omega} s_n.$$

那么, $f \in N_s \cap \bigcap_{n<\omega} D_n$. □

由此可知, 每一个基本开集, 从而每一个非空开集, 都是第二纲集. 于是, 贝尔空间上的全体稀疏子集构成一个包括所有单点子集的非平凡的 σ-可加的理想. 依据这一理想, 我们同样地直接在贝尔空间上引入贝尔性质: $X \subset \mathcal{N}$ 具有贝尔性质当且仅当 X 与某个开集的对称差是一个稀疏子集. 同样地, 我们有贝尔空间上的全体具有贝尔性质的子集合构成一个 σ-代数. 于是, 贝尔空间上的博雷尔子集 (那些 $\mathcal{N}$ 上包含全体开集的最小的 σ-代数中的元素) 也都具有贝尔性质.

在贝尔空间上也可定义勒贝格测度. 先在自然数集合上定义一个概率测度: 对于每一个自然数 n, 定义单点子集 $\{n\}$ 的勒贝格测度为

$$\lambda(\{n\}) = \frac{1}{2^{n+1}},$$

在考虑由此诱导在 $\mathcal{N}$ 上的乘积测度; 直接写出来: 对于 $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, 定义

$$\lambda\left(N_s\right) = \prod_{k=0}^{\operatorname{dom}(s)-1} \frac{1}{2^{s(k)+1}},$$

然后在利用可数可加性延拓到整个开集, 乃至整个博雷尔集. 这样, 整个实数轴上勒贝格测度的性质完全可以被迁移到贝尔空间上来. 比如, 零测集理想是一个包括所有单点集的 σ-可加的理想, 等等.

事实上, 无论是 $\mathbb{N}$ 的完备性证明, 还是贝尔纲定理的证明, 我们已经注意到: 在 $\mathcal{N}$ 上, 往往可以直接写出所要的证据. 这便是专注于贝尔空间来探讨实数子集正则性问题一个基本理由: 它有更为明确可用的地方.

3.6.1　闭集树表示

下面再来看看贝尔空间上闭子集的表示.

回顾一下集合 $\mathbb{N}^{<\omega}$ 上有一个自然偏序:

$$t \leqslant s \leftrightarrow \left(\operatorname{dom}(t) \leqslant \operatorname{dom}(s) \wedge t = s\restriction_{\operatorname{dom}(t)}\right).$$

在这个偏序之下, $(\mathbb{N}^{<\omega}, \leqslant)$ 是一个树 (完备树), 并且 $\mathcal{N}$ 恰好是这个完备树上的全体树枝的集合. 于是, 我们考虑这棵树的子树:

定义 3.25　称 $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ **为一个树**当且仅当

$$\forall t \in T\, \forall i \leqslant \operatorname{dom}(t)\ (t\restriction_i \in T).$$

当 $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ 时,

$$[T] = \{f \in \mathcal{N} \mid \forall n < \omega\ (f\restriction_n \in T)\}$$

为树 T 的全体无穷树枝的集合.

有趣的是贝尔空间上的闭子集都可以用这样的树来表示:

定理 3.26 $X \subseteq \mathcal{N}$ 是一个闭子集当且仅当 X 是某一棵树 $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ 的全体无穷树枝的集合, $X = [T]$.

证明 设 $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ 为一个树. 设 $f \in \mathcal{N}$ 且 $f \notin [T]$. 令

$$m = \min\{n < \omega \mid f\restriction_n \notin T\}.$$

那么, $N_{f\restriction_m} \cap [T] = \varnothing$. 所以, $[T]$ 是一个闭子集.

反之, 设 $X \subseteq \mathcal{N}$ 是一个闭子集. 令

$$T_X = \left\{ s \in \mathbb{N}^{<\omega} \;\middle|\; \exists f \in X\ (s \subset f) \right\}.$$

(称 T_X 为闭集 X 的表示树.) 那么 $T_X \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ 是一棵树, 并且 $X = [T_X]$: 若 $f \in X$, 则

$$\forall n < \omega\ (f\restriction_n \in T_X),$$

所以 $X \subseteq [T_X]$; 反之, 设 $f \in [T_X]$, 对于每一个 $n < \omega$, 令 $g_n \in X$ 满足 $(g_n)\restriction_n = f\restriction_n$, 那么 f 是 X 中的序列 $\langle g_n \mid n < \omega\rangle$ 的极限, 因为 X 是闭子集, 所以, $f \in X$. □

在贝尔空间中, 一个闭子集 F 的孤立点 f 则有着显著特点: 一定存在一个自然数 $n < \omega$ 以至于在 f 的邻域 $N_{f\restriction_n}$ 中 f 是 F 的唯一元素; 于是, 如果 T 表示 F, 那么在这样的节点 $f\restriction_n$ 上树 T 便没有分叉的两棵无穷子树. 这给出我们一种启示: 我们应当考虑完备树.

定义 3.26 称树 $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ 是一个**完备树**当且仅当

$$\forall t \in T\, \exists s_1 \in T\, \exists s_2 \in T\ (t \leqslant s_1 \wedge t \leqslant s_2 \wedge s_1 \perp s_2),$$

其中,

$$s_1 \perp s_2 \leftrightarrow$$
$$\exists n < \min\{\mathrm{dom}(s_1), \mathrm{dom}(s_1)\}\ ((s_1)\restriction_n = (s_2)\restriction_n \wedge (s_1)(n) \neq (s_2)(n)).$$

命题 3.6 设 $X \subseteq \mathcal{N}$ 为一个非空闭子集, 那么 X 一个完备集当且仅当它的表示树 T_X 是一棵完备树.

康托尔完备集定理 (定理 3.23) 表明: 每一个不可数的闭集都含有一个完备子集. 现在我们利用闭集的树表示再次给出这个定理的证明. 我们所要做的是将康托尔–本狄克森的 “求导” 过程移植到树上来, 从而逐步消除闭集的孤立点.

设 $T \subset \mathbb{N}^{<\omega}$ 是一棵树. 我们对 T 求导:

$$T' = \{t \in T \mid \exists s_1 \in T\, \exists s_2 \in T\ (t \leqslant s_1 \wedge t \leqslant s_2 \wedge s_1 \perp s_2)\}.$$

依此, T 是一棵完备树当且仅当 $\varnothing \neq T = T'$.

按照这个定义, 对树 T 求导一次就损失 T 的一些孤立点. 那么求导一次, 会损失多少孤立点呢?

引理 3.13 设 $T \subset \mathbb{N}^{<\omega}$ 是一棵树. 那么 $|[T]-[T']| \leqslant \aleph_0$.

证明 设 $f \in ([T]-[T'])$. 令

$$n_f = \min\{k \in \omega \mid f\restriction_k \in (T-T')\},$$

以及令 $s_f = f\restriction_{n_f}$. 如果 $f, g \in ([T]-[T'])$ 且 $f \neq g$, 那么 $f\restriction_{\triangle(f,g)} \in T'$, 其中

$$\triangle(f,g) = \min\{n < \omega \mid f(n) \neq g(n)\}.$$

因此, $s_f \neq s_g$. 也就是说映射 $([T]-[T']) \ni f \mapsto s_f \in \mathbb{N}^{<\omega}$ 是一个单射. □

现在我们可以来证明康托尔完备集定理 (定理 3.23): 设 $F \subset \mathcal{N}$ 是一个不可数的闭集. 令 $T = T_X$ 为 F 的表示树. 我们递归地逐步对 T 的子树求导以剪掉孤立树枝.

(i) $T_0 = T$;

(ii) $T_{\alpha+1} = (T_\alpha)'$;

(iii) $T_\alpha = \bigcap\{T_\beta \mid \beta < \alpha\}$.

由于 $T_0 \supset T_1 \supset \cdots \supset T_\alpha \supset T_{\alpha+1} \supset \cdots, T_0$ 至多可数, 所以

$$\exists \alpha < \omega_1 \ (T_{\alpha+1} = T_\alpha).$$

令 $\theta = \min\{\alpha < \omega_1 \mid T_{\alpha+1} = T_\alpha\}$. 如果 $T_\theta \neq \varnothing$, 那么 T_θ 就是一棵完备树. 因为

$$\left[\bigcap\{T_\beta \mid \beta < \alpha\}\right] = \bigcap_{\beta<\alpha}[T_\beta],$$

所以

$$[T]-[T_\theta] = \bigcup_{\alpha<\theta}([T_\alpha]-[T'_\alpha]).$$

根据引理 3.13, 对于 $\alpha < \theta$, $([T_\alpha]-[T'_\alpha])$ 是一个可数集合, 所以, $[T]-[T_\theta]$ 是一个可数集合. 因为 $[T]$ 不可数, $T_\theta \neq \varnothing$. 这样, 完备集 $[T_\theta] \subset [T]$, 并且 $[T]$ 是一个完备子集 $[T_\theta]$ 与一个至多可数的集合 $[T]-[T_\theta]$ 的并.

到此为止, 我们已经见到了两个可分完备距离空间: 实数轴与贝尔空间. 当然, 我们自然有它们的笛卡尔乘积空间 (在它们的笛卡尔乘积之上配置乘积拓扑, 或者欧几里得距离). 为了统一各种单独分析, 我们引进波兰空间[2]的概念.

2 Polish Space.

定义 3.27 称一个拓扑空间 (X,τ) 为一个**波兰空间**当且仅当它与一个可分完备距离空间拓扑同胚.

例 3.5 实数轴 $\mathbb{R}$、贝尔空间 $\mathcal{N}$、康托尔空间 2^ω、闭区间 $[0,1]$、平面上的单位圆环

$$\mathbb{T}=\left\{(x,y)\;\middle|\;x^2+y^2=1\right\},$$

以及希尔伯特空间 $[0,1]^\omega$, 等等, 都是波兰空间.

波兰空间有一个基本特点: 它们都是贝尔空间的连续像!

引理 3.14 设 (X,τ) 是一个波兰空间. 那么一定存在一个从贝尔空间 $\mathcal{N}$ 到 X 的连续满射.

证明 设 (X,d) 是一个可分完备距离空间, 其中 $d:X^2\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ 是 X 上的距离函数. 设

$$D=\{a_n\mid n<\omega\}\subset X$$

为 X 的一个可数稠密子集的单一列表. 根据可分距离完备性, $X=\bar{D}$ 是 D 的闭包.

现在我们来定义一个从 $\mathbb{N}^{<\omega}$ 到 (X,D) 上的有界闭球之集合上的一个满足额外要求的单射以至于由这个单射我们可以定义所要的连续满射. 定义由自然数集合上的有限序列的长度递归实施.

令 $C_\varnothing=X$. 对于每一个 $i\in\mathbb{N}$, 令

$$C_{\langle i\rangle}=\left\{x\in C_\varnothing\;\middle|\;d(a_i,x)\leqslant\frac{1}{2}\right\}.$$

任给 $x\in X$, 令 $B_x=\left\{y\in X\;\middle|\;d(x,y)<\frac{1}{4}\right\}$. 由稠密性, $D\cap B_x$ 是一个无穷子集. 所以

$$\bar{B}_x=\left\{y\in X\;\middle|\;d(x,y)\leqslant\frac{1}{4}\right\}\subset\bigcup_{a_j\in D\cap B_x}C_{\langle j\rangle},$$

进而 $C_\varnothing\subset\bigcup\left\{C_{\langle i\rangle}\;\middle|\;i<\omega\right\}$.

现在假设对于 $\mathbb{N}^n$ 中的每一个序列 s 都已经定义好 X 的一个闭球 C_s, C_s 的球半径小于等于 $\frac{1}{n+1}$, 并且

$$\forall i<\mathrm{dom}(s)\;\left(C_s\subset C_{s\restriction_i}\right).$$

令

$$T_s=\{j<\omega\mid a_j\in C_s\}=\{j_k\mid k<\omega\}.$$

对于每一个 $k<\omega$, 令 $B_k=\left\{x\in X\;\middle|\;d(a_{j_k},x)\leqslant\frac{1}{n+2}\right\}$, 再令 $C_{s+\langle k\rangle}=B_k\cap C_s$, 基于同样的理由,

$$C_s\subseteq\bigcup\left\{c_{s+\langle k\rangle}\;\middle|\;k<\omega\right\}.$$

这样, 我们得到 X 上的闭球的树结构:

$$\left(\left\{C_s \mid s \in \mathbb{N}^{<\omega}\right\}, \supset\right).$$

设 $f \in \mathcal{N}$. 由 f 确定的树枝 $b_f = \langle C_{f\upharpoonright n} \mid n < \omega\rangle$ 是一个在 $\supset$-关系下严格单调递减的闭球序列, 并且每个闭球 $C_{f\upharpoonright n}$ 的半径都小于 $\frac{1}{n+1}$. 根据 (X,d) 的完备性, 交集

$$C_f = \bigcap \{C_{f\upharpoonright n} \mid n < \omega\}$$

恰好包括一个点. 于是, 令 $\{H(f)\} = C_f$.

我们将 $H : \mathcal{N} \to X$ 是一个连续满射的验证工作留给读者. □

3.6.2 博雷尔集

正如我们在实数轴上定义了博雷尔子集那样, 我们在波兰空间上也可以定义博雷尔集: 设 (X,d) 是一个波兰空间. 令 $\mathcal{B}(X)$ 为 X 上包含全体开子集的最小 σ-代数, 然后定义 $\mathcal{B}(X)$ 中的元素为博雷尔集. 注意到 σ-代数构成的基本特点: 它包含所有开子集; 对求补运算封闭; 对可数并封闭. 这样我们可以递归地将这些沿着可数序数逐步实施, 从而得到博雷尔集的分层.

定义 3.28 对于 $1 \leqslant \alpha < \omega_1$, 令

(1) $\mathbf{\Sigma}_1^0 = X$ 上所有开集的集合;

(2) $\mathbf{\Pi}_1^0 = X$ 上所有闭集的集合;

(3) $\mathbf{\Sigma}_\alpha^0 = \left\{ \bigcup_{n<\omega} f(n) \,\middle|\, f : \omega \to \bigcup \left\{ \mathbf{\Pi}_\beta^0 \,\middle|\, \beta < \alpha \right\} \right\}$;

(4) $\mathbf{\Pi}_\alpha^0 = \left\{X - A \mid A \in \mathbf{\Sigma}_\alpha^0\right\} = \left\{ \bigcap_{n<\omega} f(n) \,\middle|\, f : \omega \to \bigcup \left\{ \mathbf{\Sigma}_\beta^0 \,\middle|\, \beta < \alpha \right\} \right\}$.

下面我们来验证每一个 $\mathbf{\Sigma}_\alpha^0 \cup \mathbf{\Pi}_\alpha^0$ 中的集合都是一个博雷尔集, 并且每一个博雷尔集都在某个 $\mathbf{\Sigma}_\alpha^0 \cup \mathbf{\Pi}_\alpha^0$ 之中.

命题 3.7 (1) 对于每一个 $1 \leqslant \alpha < \omega_1$ 都有 $\mathbf{\Sigma}_\alpha^0 \cup \mathbf{\Pi}_\alpha^0 \subset \mathcal{B}(X)$;

(2) 对于 $1 \leqslant \alpha < \beta < \omega_1$ 都有 $\mathbf{\Sigma}_\alpha^0 \subset \mathbf{\Sigma}_\beta^0, \mathbf{\Sigma}_\alpha^0 \subset \mathbf{\Pi}_\beta^0, \mathbf{\Pi}_\alpha^0 \subset \mathbf{\Pi}_\beta^0, \mathbf{\Pi}_\alpha^0 \subset \mathbf{\Sigma}_\beta^0$;

(3) $\bigcup_{1\leqslant\alpha<\omega_1} \mathbf{\Sigma}_\alpha^0 = \bigcup_{1\leqslant\alpha<\omega_1} \mathbf{\Pi}_\alpha^0 = \mathcal{B}(X)$;

(4) 对于每一个 $1 \leqslant \alpha < \omega_1$, $\mathbf{\Sigma}_\alpha^0$ 以及 $\mathbf{\Pi}_\alpha^0$ 都对有限个元素之并、有限个元素之交封闭, 并且如果 $f : X \to X$ 是一个连续函数, 那么

$$\left(A \in \mathbf{\Sigma}_\alpha^0 \to f^{-1}[A] \in \mathbf{\Sigma}_\alpha^0\right) \;\wedge\; \left(A \in \mathbf{\Pi}_\alpha^0 \to f^{-1}[A] \in \mathbf{\Pi}_\alpha^0\right).$$

证明 (1) 对可数序数 $1 \leqslant \alpha$ 施归纳. 当 $\alpha = 1$ 时, 由 $\mathcal{B}(X)$ 的定义以及 $\mathbf{\Sigma}_1^0 \cup \mathbf{\Pi}_1^0$ 的定义即得. 当 $\alpha > 1$ 时, 由 $\mathcal{B}(X)$ 的定义以及 $\mathbf{\Sigma}_\alpha^0 \cup \mathbf{\Pi}_\alpha^0$ 的定义和归纳假设即得.

(2) 我们需要验证 $\mathbf{\Sigma}_1^0 \subset \mathbf{\Sigma}_2^0$. $\varnothing$ 既是开集也是闭集, 它也是可数个空集的并, 所以 $\varnothing \in \mathbf{\Sigma}_2^0$. 设 $A \in \mathbf{\Sigma}_1^0$ 非空. 令 $D = \{a_n \mid n < \omega\}$ 为 X 的一个可数稠密子集. 令

$$I_A = \{i < \omega \mid a_i \in A\}.$$

对于每一个 $i \in I_A$, 令

$$K_i = \left\{r \in \mathbb{Q}^+ \;\middle|\; \forall x \in X \ (d(a_i, x) \leqslant r \to x \in A)\right\}.$$

对于 $r \in K_i$, 令 $F(a_i, r) = \{x \in X \mid d(a_i, x) \leqslant r\}$, 那么 $F(a_i, r) \subset A$ 是一个闭子集.

断言　$A = \bigcup\{F(a_i, r) \mid i \in I_A \wedge r \in K_i\}$.

对于 $x \in A$, 令 $r(x) \in \mathbb{R}^+$ 满足要求 $B_{r(x)} = \{y \in X \mid d(x, y) < r(x)\} \subset A$; 令 $s(x) = \dfrac{r(x)}{3}$; 令

$$i(x) \in I_A$$

满足要求 $a_{i(x)} \in B_{s(x)}$ 并且 $x \neq a_{i(x)}$; 令 $d\left(x, a_{i(x)}\right) \leqslant \epsilon(x) < s(x)$ 为一个有理数; 那么

$$x \in F\left(a_{i(x)}, \epsilon(x)\right) = \left\{y \in X \;\middle|\; d\left(a_{i(x)}, y\right) \leqslant \epsilon(x)\right\} \subset A.$$

这就证明了 $\mathbf{\Sigma}_1^0 \subset \mathbf{\Sigma}_2^0$.

由此以及定义立即得到 $\mathbf{\Pi}_1^0 \subset \mathbf{\Sigma}_2^0$. 由定义立即得到 $\mathbf{\Pi}_1^0 \subset \mathbf{\Sigma}_2^0$, 从而 $\mathbf{\Sigma}_1^0 \subset \mathbf{\Pi}_2^0$.

剩下的依归纳假设以及定义就好.

(3) 第一个等式由 (2) 即得. 剩下的只要证明 $\bigcup\limits_{1 \leqslant \alpha < \omega_1} \mathbf{\Sigma}_\alpha^0$ 是一个 σ-代数, 这由定义以及等式

$$\bigcup_{1 \leqslant \alpha < \omega_1} \mathbf{\Sigma}_\alpha^0 = \bigcup_{1 \leqslant \alpha < \omega_1} \mathbf{\Pi}_\alpha^0$$

即得.

(4) 对 $1 \leqslant \alpha < \omega_1$ 施归纳即得. □

可数距离空间上的每一个子集合都是一个博雷尔集, 因此, 在可数距离空间上博雷尔集这一概念是平凡的, 没有意义的. 但是对不可数的波兰空间而言, 博雷尔集这一概念是有意义的, 它构成有意义的区分, 并且上面定义的层次也是非平凡的. 现在我们来证明这一事实, 我们只对贝尔空间来证明. 一般的证明留给读者.

引理 3.15　*对 $1 \leqslant \alpha < \omega_1$ 而言, 一定存在一个 $U \subset \mathcal{N}^2$ (称之为一个***通用集***) 来满足如下要求:*

(1) U 在 $\mathcal{N}^2$ 上是 $\mathbf{\Sigma}_\alpha^0$ 中的元素;

(2) 对于每一个 $A \in \mathbf{\Sigma}_\alpha^0(\mathcal{N})$, $\exists a \in \mathcal{N}\ (A = \{x \in \mathcal{N} \mid (x, a) \in U\})$.

证明　对 $1 \leqslant \alpha < \omega_1$ 施归纳.

当 $\alpha = 1$ 时, 我们需要构造一个通用开集 $U_1 \subset \mathcal{N}^2$. 将 $\mathcal{N}$ 上的基本开集单一地罗列出来:

$$G_1, G_2, \cdots, G_k, \cdots$$

且令 $G_0 = \varnothing$. 定义 $U_1 \subset \mathcal{N}^2$ 如下：对于 $(x, y) \in \mathcal{N}^2$, 令

$$(x, y) \in U_1 \leftrightarrow \exists n < \omega \ \left(x \in G_{y(n)}\right).$$

对于每一个 $n < \omega$, 令

$$H_n = \left\{ (x, y) \in \mathcal{N}^2 \ \middle| \ x \in G_{y(n)} \right\},$$

那么 H_n 是 $\mathcal{N}^2$ 上的一个开集. 由于 $U_1 = \bigcup \{ H_n \mid n < \omega \}$, U_1 是一个开集. 如果 A 是 $\mathcal{N}$ 上的一个开集, 令 $a \in \mathcal{N}$ 满足

$$A = \bigcup_{n<\omega} G_{a(n)}.$$

(这样的 a 是存在的.) 于是, $A = \{ x \in \mathcal{N} \mid (x, a) \in U \}$.

设 $\alpha = \beta + 1$, U_β 是一个 $\mathbf{\Sigma}^0_\beta$ 通用集. 根据引理 3.14, 令 $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}^\omega$ 为一个连续满射. 对于 $a \in \mathcal{N}$, $n < \omega$, 令

$$\forall k < \omega \ \left(a_{(n)}(k) = f(a)(n, k)\right).$$

对于 $(x, y) \in \mathcal{N}^2$, 再令

$$(x, y) \in U_\alpha \leftrightarrow \exists n < \omega \ \left(\left(x, y_{(n)}\right) \notin U_\beta\right).$$

对于 $n < \omega$, 令 $H_n = \left\{ (x, y) \in \mathcal{N}^2 \ \middle| \ \left(x, y_{(n)}\right) \notin U_\beta \right\}$ 是一个 $\mathbf{\Pi}^0_\beta$ 集合. 那么 $U_\alpha = \bigcup \{ H_n \mid n < \omega \}$ 是一个 $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ 集合.

设 $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(\mathcal{N})$. 令 $A = \bigcup \{ A_n \mid n < \omega \}$, 其中 A_n 是一个 $\mathbf{\Pi}^0_\beta$ 集合. 对 $n < \omega$, 令 $a_n \in \mathcal{N}$ 见证

$$\mathcal{N} - A_n = \{ x \in \mathcal{N} \mid (x, a_n) \in U_\beta \}.$$

令 $a \in \mathcal{N}$ 满足 $\forall n < \omega \ \left(a_{(n)} = a_n\right)$. 那么 $A = \{ x \in \mathcal{N} \mid (x, a) \in U_\alpha \}$.

现在设 $\alpha < \omega_1$ 是一个极限序数. 对于 $1 \leqslant \beta < \alpha$, 设 U_β 为 $\mathbf{\Sigma}^0_\beta$ 通用集合. 设

$$1 \leqslant \alpha_0 < \cdots < \alpha_n < \cdots$$

为一个收敛于 α 的序列. 同样, 根据引理 3.14, 令 $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}^\omega$ 为一个连续满射. 对于 $a \in \mathcal{N}$, 对于 $n < \omega$, 令

$$\forall k < \omega \ \left(a_{(n)}(k) = f(a)(n, k)\right).$$

对于 $(x,y)\in\mathcal{N}^2$, 再令

$$(x,y)\in U_\alpha \leftrightarrow \exists n<\omega\ \left((x,y_{(n)})\notin U_{\alpha_n}\right).$$

这样 U_α 是 $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha\left(\mathcal{N}^2\right)$. 如果 A 是 $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(\mathcal{N})$, 设

$$A=\bigcup_{i<\omega}A_i,$$

每一个 A_i 是 $\mathbf{\Pi}^0_{\alpha_i}$. 对于每一个 $n<\omega$, 令 $a_n\in\mathcal{N}$ 见证

$$\mathcal{N}-A_n=\{x\in\mathcal{N}\mid (x,a_n)\in U_{\alpha_n}\}.$$

令 $a\in\mathcal{N}$ 满足 $\forall n<\omega\ \left(a_{(n)}=a_n\right)$. 那么

$$A=\{x\in\mathcal{N}\mid (x,a)\in U_\alpha\}.$$

□

推论 3.5 对于 $1\leqslant\alpha<\omega_1$, $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha-\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ 非空.

证明 设 $1\leqslant\alpha<\omega_1$. 令 U_α 为 $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha\left(\mathcal{N}^2\right)$ 通用集合. 令

$$A=\{x\in\mathcal{N}\mid (x,x)\in U_\alpha\}.$$

自然, A 是一个 $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(\mathcal{N})$ 集合. 假如 A 也是 $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$, 那么它的补集就应当是 $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$, 因此就应当有一个 $a\in\mathcal{N}$ 来见证等式:

$$A=\{x\in\mathcal{N}\mid (x,a)\notin U_\alpha\}.$$

考虑点 (a,a). 如果 $a\in A$, 由 A 的定义, $(a,a)\in U_\alpha$; 可是上面的等式, $(a,a)\notin U_\alpha$. 如果 $a\notin A$, 那么由上述等式, $(a,a)\in U_\alpha$; 可是由 A 的定义, 这又意味着 $a\in A$. 总之是矛盾. □

3.6.3 解析子集

上面我们看到, 在不可数的波兰空间上博雷尔集的确被分成了 ω_1 层. 这也就意味着每一个可数序数 $1\leqslant\alpha<\omega_1$ 标识着一层不同复杂性的博雷尔集. 我们还需要回答一个问题: 在不可数的波兰空间上, 比如 $\mathbb{R}$, $\mathcal{N}$, 是否还有可以简单定义但不是博雷尔子集的集合?

定义 3.29 设 A 是波兰空间 (X,d) 上的一个子集. 称 A 是 X 上的一个**解析子集**当且仅当 A 是一个从 $\mathcal{N}$ 到 X 的连续函数 f 的像集: $A=f[\mathcal{N}]$.

据传说, 解析集概念的引入源自于一位年轻大学生发现了一位成熟数学家看走眼的地方: 那位颇有建树的数学家默认所有博雷尔集合的全体对连续函数的像是封闭的. 莫斯科大学一位 19 岁的大学生发现在一个结论的分析中这位数学家在这个地方看走眼了. 于是, 解析集的概念被引入.

例 3.6 根据引理 3.14, 每一个波兰空间 X 都是它自身上的一个解析子集; 每一个单点子集都是一个解析子集.

下面我们希望证明每一个博雷尔集都是解析子集.

我们先引进一个工具: 投影. 投影事实上是连续函数的一种.

定义 3.30 乘积空间 $X\times Y$ 的子集 A 在 X 上的投影[3], 记成 $\mathrm{TY}(A)$, 是下述集合:

$$\mathrm{TY}(A)=\{x\in X\mid \exists y\in Y\,((x,y)\in A)\}.$$

引理 3.16 设 (X,d) 是一个波兰空间.

(1) 如果 $A\subseteq X$ 是一个闭集, 那么 A 是 X 上的一个解析集.

(2) 如果 $A\subseteq X$ 是一个博雷尔集, 那么 A 是乘积空间 $X\times\mathcal{N}$ 上的某个闭集的投影.

证明 (1) 之所以成立是因为一个波兰空间上的任何一个闭子集自身都是一个波兰空间. 因此, 根据引理 3.14, 我们就有所要的结论.

(2) 令 $\mathcal{C}=\{A\subseteq X\mid \exists F\subseteq X\times\mathcal{N}\ (\bar{F}=F\ \wedge\ A=\mathrm{TY}(F))\}$. 我们来证明 $\mathcal{C}$ 是一个包含 X 上的全体开集合的全体闭集, 以及对可数并和可数交封闭的集合. 由此得知 $\mathcal{B}(X)\subseteq\mathcal{C}$.

首先, 如果 $A\subseteq X$ 是一个闭子集, 那么 $A\times\mathcal{N}$ 是 $X\times\mathcal{N}$ 上的一个闭子集, 并且 $A=\mathrm{TY}(A\times\mathcal{N})$.

其次, 因为根据 $\mathbf{\Sigma}_1^0\subset\mathbf{\Sigma}_2^0$ 的证明, 每一个开集都是可数个闭集的并, 所以, 我们只需要证明 $\mathcal{C}$ 关于可数并是封闭的, 就能得到 $\mathcal{C}$ 包含了全体开集.

现在我们集中精力来证明 $\mathcal{C}$ 关于可数并和可数交是封闭的.

从引理 3.15 的证明中, 我们知道依据引理 3.14, 有一个连续满射

$$\mathcal{N}\ni a\mapsto \left\langle a_{(n)}\ \middle|\ n<\omega\right\rangle\in\mathcal{N}^{\omega}.$$

另外, 每一个闭子集在连续函数作用下的原像集合也是闭集. 依据这些事实, 我们来证明所要的封闭性.

对于每一个 $n<\omega$, 设 $F_n\subset X\times\mathcal{N}$ 为一个闭集,

$$A_n=\mathrm{TY}(F_n)=\{x\in X\ \mid \exists a\in\mathcal{N}\,(x,a)\in F_n\}.$$

我们有

$$\begin{aligned}x\in\bigcup_{n<\omega}A_n&\leftrightarrow \exists n\in\omega\,\exists a\in\mathcal{N}\,(x,a)\in F_n\\&\leftrightarrow \exists b\in\mathcal{N}\ \exists a\in\mathcal{N}\ (x,a)\in F_{b(0)}\end{aligned}$$

3 TY 是 “投影” 的汉语拼音缩写.

$$\leftrightarrow \exists c \in \mathcal{N} \ \left(\left(x, c_{(0)}\right) \in F_{c_{(1)}(0)} \right).$$

于是, $\bigcup_{n<\omega} A_n$ 是下述闭集的投影:

$$\left\{ (x,c) \in X \times \mathcal{N} \ \middle| \ \left(x, c_{(0)}\right) \in F_{c_{(1)}(0)} \right\}.$$

类似地, 还有

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{n<\omega} A_n &\leftrightarrow \forall n \in \omega \, \exists a \in \mathcal{N} \, (x,a) \in F_n \\ &\leftrightarrow \exists c \in \mathcal{N} \, \forall n \in \mathbb{N} \ \left(x, c_{(n)}\right) \in F_n \\ &\leftrightarrow \exists c \in \mathcal{N} \ \left((x,c) \in \left(\bigcap_{n<\omega} \left\{ (x,c) \in X \times \mathcal{N} \ \middle| \ (x, c_{(n)}) \in F_n \right\} \right) \right); \end{aligned}$$

于是, $\bigcap_{n<\omega} A_n$ 是下述闭集的投影:

$$\bigcap_{n<\omega} \left\{ (x,c) \in X \times \mathcal{N} \ \middle| \ (x, c_{(n)}) \in F_n \right\}.$$

□

下述引理给出解析集的几种对等定义:

引理 3.17 设 A 是波兰空间 (X,d) 的一个子集合, 下述命题对等:

(1) A 是一个从 $\mathcal{N}$ 到 X 的连续函数 f 的像集, $A = f[\mathcal{N}]$;

(2) A 是某个波兰空间上一个博雷尔集 B 的连续映像;

(3) A 是 X 与某个波兰空间 Y 的乘积空间 $X \times Y$ 上的某个博雷尔集合 B 的投影: $A = \mathrm{TY}(B)$;

(4) A 是乘积空间 $X \times \mathcal{N}$ 上某个闭子集的投影.

证明 设 X 和 Y 是两个波兰空间. 从 $X \times Y$ 到 X 的自然投影 $\pi : X \times Y \ni (x,y) \mapsto x \in X$ 是一个连续满射. 根据引理 3.16 我们知道每一个博雷尔集都是解析集; 一个博雷尔集的连续映像是一个解析集. 反之, 若 $A \subseteq X$ 是一个解析集, $A = f[\mathcal{N}]$, $f : \mathcal{N} \to X$ 是一连续函数, 那么 f 的反图

$$\{(f(x), x) \in X \times \mathcal{N} \mid x \in \mathcal{N}\}$$

是 $X \times \mathcal{N}$ 上的一个闭集, A 就是它的投影. □

苏斯林算子

我们来定义一个将可数并运算与可数交运算有机结合起来的算子 $\mathscr{A}$.

设 f 是一个定义在 $\mathbb{N}^{<\omega}$ 的函数, 定义

$$\mathscr{A}(f) = \bigcup_{a \in \mathcal{N}} \bigcap_{n<\omega} f\left(a \restriction_n\right).$$

称由此定义的运算为**苏斯林运算**.

对于 $f:\mathbb{N}^{<\omega}\to\mathrm{V}$, 对 $s\in\mathbb{N}^{<\omega}$, 令

$$f^*(s)=\bigcap_{i\leqslant\operatorname{dom}(s)} f\left(s\restriction_i\right).$$

那么 $\forall s,t\in\mathbb{N}^{<\omega}\ \ (s\subset t\to f^*(s)\supset f^*(t))$, 并且 $\mathscr{A}(f)=\mathscr{A}\left(f^*\right)$.

称定义在 $\mathbb{N}^{<\omega}$ 上的满足条件 $\forall s,t\in\mathbb{N}^{<\omega}\ \ (s\subset t\to f(s)\supset f(t))$ 的函数 f 为**单调递减函数**.

自此, 我们将注意力放在对单调递减函数实施苏斯林运算之上, 并且将关注定义在 $\mathbb{N}^{<\omega}$ 之上, 取值为闭集的那些单调递减函数.

引理 3.18 一个波兰空间 (X,d) 上的一个子集合 A 是一个解析集合的充分必要条件存在一个单调递减的 $f:\mathbb{N}^{<\omega}\to\mathbf{\Pi}_1^0(X)$ 来满足等式

$$A=\mathscr{A}(f).$$

证明 设 $f:\mathbb{N}^{<\omega}\to\mathbf{\Pi}_1^0(X)$ 是一个单调递减函数. 令 $A=\mathscr{A}(f)$. 我们来证 A 是解析集. 根据苏斯林运算的定义, 对于 $x\in X$,

$$\begin{aligned} x\in A &\leftrightarrow \exists a\in\mathcal{N}\left(x\in\bigcap_{n<\omega} f\left(a\restriction_n\right)\right)\\ &\leftrightarrow \exists a\in\mathcal{N}\left((x,a)\in\left(\bigcap_{n<\omega}\left\{(x,a)\in X\times\mathcal{N}\mid x\in f\left(a\restriction_n\right)\right\}\right)\right). \end{aligned}$$

于是, A 是后述博雷尔集合的投影: $\bigcap_{n<\omega}\left\{(x,a)\in X\times\mathcal{N}\mid x\in f\left(a\restriction_n\right)\right\}$. 根据引理 3.17, A 是一个解析集.

反之, 设 $A\subseteq X$ 是一个解析集. 令 $f:\mathcal{N}\to X$ 为满足要求 $A=f[\mathcal{N}]$ 的连续函数. 对于 $s\in\mathbb{N}^{<\omega}$, 定义

$$h(s)=\overline{f\left[N_s\right]}.$$

那么 $h:\mathbb{N}^{<\omega}\to\mathbf{\Pi}_1^0(X)$ 是一个单调递减函数.

对于 $a\in\mathcal{N}$,

$$\bigcap_{n<\omega} f\left[N_{a\restriction_n}\right]=\bigcap_{n<\omega}\overline{f\left[N_{a\restriction_n}\right]}=\{f(a)\}.$$

于是, 下面的关系式表明 $A=\mathscr{A}(h)$:

$$A=f[\mathcal{N}]=\bigcup_{a\in\mathcal{N}}\bigcap_{n<\omega}\overline{f\left[N_{a\restriction_n}\right]}.$$ □

综合起来, 我们有

命题 3.8 设 (X,d) 是一个波兰空间. 令 $\mathbf{\Sigma}_1^1(X)$ 为 X 上的所有解析集的集合. 那么

(1) $\mathbf{\Sigma}_1^1(X)$ 包含 X 上所有的博雷尔集;

(2) $\mathbf{\Sigma}_1^1(X)$ 关于可数并和可数交封闭;

(3) $\mathbf{\Sigma}_1^1(X)$ 关于连续函数像和逆像封闭;

(4) $\mathbf{\Sigma}_1^1(X)$ 关于苏斯林运算封闭, 即若 $f:\mathbb{N}^{<\omega}\to\mathbf{\Sigma}_1^1(X)$, 那么 $\mathscr{A}(f)\in\mathbf{\Sigma}_1^1(X)$.

一个自然的问题是: $\mathbf{\Sigma}_1^1(X)$ 是否关于取补运算封闭?

为了解答这个问题, 我们引进波兰空间上的投影集层次.

3.6.4 投影集层次

设 (X,d) 是一个波兰空间. 对于 $1\leqslant n<\omega$, 我们来递归地定义 X 上的投影集层次:

(1) $\mathbf{\Sigma}_1^1(X)$ 为 X 上的所有解析集的集合;

(2) $\mathbf{\Pi}_1^1(X)$ 为 X 上的所有解析集的补集的集合 (称其元素为**余解析集**);

(3) $\mathbf{\Sigma}_{n+1}^1(X)$ 为 $X\times\mathcal{N}$ 上的所有的 $\mathbf{\Pi}_n^1(X\times\mathcal{N})$-集合的投影的集合:

$$\mathbf{\Sigma}_{n+1}^1(X)=\left\{\mathrm{TY}(A)\;\middle|\;A\in\mathbf{\Pi}_n^1(X\times\mathcal{N})\right\};$$

(4) $\mathbf{\Pi}_{n+1}^1(X)=\left\{X-A\;\middle|\;A\in\mathbf{\Sigma}_{n+1}^1(X)\right\}$;

(5) $\mathbf{\Delta}_n^1(X)=\mathbf{\Sigma}_n^1(X)\cap\mathbf{\Pi}_n^1(X)$.

我们希望看到 $\mathbf{\Pi}_1^1(\mathcal{N})-\mathbf{\Sigma}_1^1(\mathcal{N})$ 非空, 否则上面的定义就多此一举. 为此, 我们证明一个类似于存在通用博雷尔集那样的引理.

引理 3.19 对于每一个 $1\leqslant n<\omega$, 都有一个 $\mathcal{N}^2$ 上的通用 $\mathbf{\Sigma}_n^1$ 集合 $U_n\subset\mathcal{N}^2$ 以至于

$$\forall A\in\mathbf{\Sigma}_n^1(\mathcal{N})\,\exists a\in\mathcal{N}\ \left(A=\{x\in\mathcal{N}\mid(x,a)\in U_n\}\right).$$

证明 令 $h:\mathcal{N}\times\mathcal{N}\to\mathcal{N}$ 为一个拓扑同胚映射.

当 $n=1$ 时, 令 $U_1\subset\mathcal{N}^2$ 为一个通用 $\mathbf{\Sigma}_1^0$ 集合.

设 $n>1$. 令 U_{n-1} 为一个通用 $\mathbf{\Sigma}_{n-1}^1\left(\mathcal{N}^2\right)$ 集合. 对于 $(x,y)\in\mathcal{N}\times\mathcal{N}$, 令

$$(x,y)\in U_n\leftrightarrow\exists a\in\mathcal{N}\ \left((h(x,a),y)\notin U_{n-1}\right).$$

当 $n=2$ 时, 集合

$$\left\{(x,y,a)\in\mathcal{N}^3\;\middle|\;(h(x,a),y)\notin U_1\right\}$$

是一个闭集; 当 $n>2$ 时, 集合

$$\left\{(x,y,a)\in\mathcal{N}^3\;\middle|\;(h(x,a),y)\notin U_1\right\}$$

是一个 $\mathbf{\Pi}^1_{n-1}(\mathcal{N}^3)$ 集合. 无论如何, U_n 是一个 $\mathbf{\Sigma}^1_n(\mathcal{N}^2)$ 集合.

设 $A\subseteq\mathcal{N}$ 为一个 $\mathbf{\Sigma}^1_n$ 集合. 令 B 或者是一个闭集 $(n=2)$, 或者是一个 $\mathbf{\Pi}^1_{n-1}$ $(n>2)$, 以至于

$$\forall x\in\mathcal{N}\ (x\in A\leftrightarrow\exists a\in\mathcal{N}\,(x,a)\in B)\,.$$

此时, 集合 $C=\mathcal{N}-h[B]$ 或者是开集, 或者是 $\mathbf{\Sigma}^1_{n-1}$. 由于 U_{n-1} 是通用的, 令 $b\in\mathcal{N}$ 来见证

$$C=\{u\in\mathcal{N}\mid(u,b)\in U_{n-1}\}\,.$$

根据上面 U_n 的定义, 我们有

$$\begin{aligned}x\in A&\leftrightarrow(\exists a\in\mathcal{N}\,(x,a)\in B)\leftrightarrow(\exists a\in\mathcal{N}\,(h(x,a)\notin C))\\&\leftrightarrow(\exists a\in\mathcal{N}\,((h(x,a),b)\notin U_{n-1}))\leftrightarrow(x,b)\in U_n.\end{aligned}$$

于是, U_n 是一个通用 $\mathbf{\Sigma}^1_n$ 集合. □

现在我们可以证明 $\mathbf{\Sigma}^1_1(\mathcal{N})$ 的确关于求补运算不封闭:

推论 3.6 对于 $1\leqslant n<\omega$, $\mathbf{\Sigma}^1_n(\mathcal{N})-\mathbf{\Pi}^1_n(\mathcal{N})$ 非空, 于是有

$$\mathbf{\Delta}^1_n\subset\mathbf{\Sigma}^1_n\subset\mathbf{\Delta}^1_{n+1}\ \wedge\ \mathbf{\Delta}^1_n\subset\mathbf{\Pi}^1_n\subset\mathbf{\Delta}^1_{n+1}.$$

证明 设 U_n 是一个通用 $\mathbf{\Sigma}^1_n$ 集合. 令

$$A=\{x\in\mathcal{N}\mid(x,x)\in U_n\}\,.$$

那么, 此 A 是 $\mathbf{\Sigma}^1_n$ 但不是 $\mathbf{\Pi}^1_n$. □

根据这个层次结论, $\mathbf{\Delta}^1_1(\mathcal{N})\neq\mathbf{\Sigma}^1_1(\mathcal{N})$. 根据定义, $\mathbf{\Delta}^1_1(\mathcal{N})$ 是一个包含所有博雷尔集合的 σ-代数. 那么在 $\mathbf{\Delta}^1_1(\mathcal{N})$ 中是否还有非博雷尔集合呢?

为了回答这个问题, 我们来证明一个有趣的引理: $\mathbf{\Sigma}^1_1(\mathcal{N})$ **隔离引理**.

设 X 是一个波兰空间, A 和 B 是它的两个不相交的解析子集. 我们说 A 与 B **被**一个博雷尔集所**隔离**当且仅当存在一个令下述不等式成立的博雷尔集 D:

$$A\subset D\wedge B\subset(X-D).$$

引理 3.20 任何一个波兰空间上的任意两个不相交的解析集都被一个博雷尔集所隔离.

证明 首先我们注意到: 如果 $A=\bigcup\limits_{n<\omega}A_n$ 以及 $B=\bigcup\limits_{n<\omega}B_n$, 并且对于所有的 n 和 m 都有 A_n 与 B_m 被某个博雷尔集合所隔离, 那么 A 与 B 也必然被某个博雷尔集合所隔离. 理由如下: 令 D_{nm} 为隔离 A_n 与 B_m 的博雷尔集:

$$A_n\subseteq D_{nm}\ \wedge\ B_m\subseteq(X-D_{nm}).$$

令 $D = \bigcup_{n<\omega} \bigcap_{m<\omega} D_{nm}$. 那么 D 隔离 A 与 B.

设 A 与 B 是两个不相交的解析集. 令 $f : \mathcal{N} \to X$ 和 $g : \mathcal{N} \to X$ 分别为两个连续函数, 并且

$$A = f[\mathcal{N}] \wedge B = g[\mathcal{N}].$$

对于 $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, 令 $A_s = f[N_s]$ 以及 $B_s = g[N_s]$, 它们也都是解析集合; 并且对于 $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$,

$$A_s = \bigcup_{n<\omega} A_{s+\langle n\rangle} \wedge B_s = \bigcup_{n<\omega} B_{s+\langle n\rangle}.$$

如果 $a \in \mathcal{N}$, 那么

$$\{f(a)\} = \bigcap_{n<\omega} f[N_{a\restriction_n}] = \bigcap_{n<\omega} A_{a\restriction_n}$$

以及

$$\{g(a)\} = \bigcap_{n<\omega} g[N_{a\restriction_n}] = \bigcap_{n<\omega} B_{a\restriction_n}.$$

因为 $f[\mathcal{N}] \cap g[\mathcal{N}] = \varnothing$, 所以对于 $a, b \in \mathcal{N}$, $f(a) \neq g(b)$, 令 $G_a \ni f(a)$ 以及 $G_b \ni g(b)$ 为两个不相交的开集. 由连续性, 令 $n < \omega$ 来见证

$$A_{a\restriction_n} \subset G_a \wedge B_{b\restriction_n} \subset G_b.$$

于是, $A_{a\restriction_n}$ 与 $B_{b\restriction_n}$ 被博雷尔集合所隔离.

现在我们来证明 A 与 B 也被博雷尔集合所隔离. 假设不然, 它们并没有被任何博雷尔集所隔离. 由于

$$A = \bigcup_{n<\omega} A_{\langle n\rangle} \wedge B = \bigcup_{m<\omega} B_{\langle m\rangle},$$

必然有 n_0 和 m_0 来见证 $A_{\langle n_0\rangle}$ 与 $B_{\langle m_0\rangle}$ 没有被隔离. 同样的理由, 得到 n_1 和 m_1 以至于 $A_{\langle n_0,n_1\rangle}$ 与 $B_{\langle m_0,m_1\rangle}$ 没有被隔离. 以此类推, 得到两个实数 $a \in \mathcal{N}$ 以及 $b \in \mathcal{N}$ 来见证

$$\forall n < \omega \ \left(A_{a\restriction_{n+1}} \text{与} B_{b\restriction_{n+1}} \text{没有被隔离}\right).$$

这与上一段中的结论相矛盾. □

应用这个隔离引理, 我们立即得到下述苏斯林定理: $\boldsymbol{\Delta}_1^1(\mathcal{N}) = \mathcal{B}(\mathcal{N})$.

定理 3.27 (苏斯林) *如果一个解析集的补集也是一个解析集, 那么它必定是一个博雷尔集. 也就是说, 对任何波兰空间 X 而言, $\boldsymbol{\Delta}_1^1(X) = \mathcal{B}(X)$.*

证明 设 A 是波兰空间 X 上的一个解析子集, 并且 $B = X - A$ 也是一个解析子集. 根据引理 3.20, 令博雷尔集 D 来隔离 A 与 B. 结果只能是 $A = D$. □

有了解析集的概念和解析解的全体比博雷尔集丰富这样的认识, 我们自然可以回过头来看看前面留下的问题：是否还有比博雷尔集略微复杂的但依旧有着简单定义 (比如解析集、投影集) 的实数集合具备那些正则特性、勒贝格可测、贝尔性质、完备子集特性?

定理 3.28 (1) 每一个解析集都是勒贝格可测的;

(2) 每一个解析集都具有贝尔性质;

(3) 每一个不可数的解析集都包含有非空完备子集.

证明 (1) 设 $A \subset \mathbb{R}$ 是一个解析集. 令 $f : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ 为一个见证等式 $A = f[\mathcal{N}]$ 的连续函数. 对于每一个 $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, 令 $A_s = f[N_s]$. 那么,

$$A = \mathscr{A}\left(\left\{A_s \;\middle|\; s \in \mathbb{N}^{<\omega}\right\}\right) = \mathscr{A}\left(\left\{\overline{A_s} \;\middle|\; s \in \mathbb{N}^{<\omega}\right\}\right),$$

以及 $\forall s \in \mathbb{N}^{<\omega} \left(A_s = \bigcup_{n<\omega} A_{s+\langle n\rangle}\right)$.

我们需要下面的极小覆盖引理:

引理 3.21 对于 $\mathbb{R}$ 的每一个子集 X 都有一个可测集 $B \supseteq X$ 以至于 $B - X$ 的所有可测子集都是零测集.

证明 如果 $\lambda^*(X) < \infty$, 因为

$$\lambda^*(X) = \inf\left\{\lambda(B) \mid B \supseteq X \wedge B \text{ 是可测的}\right\},$$

所以存在一个可测的 $B \supseteq X$ 以至于 $\lambda(B) = \lambda^*(X)$. 取这样一个 B, 自然 $B - X$ 的任何可测子集都是零测集. 如果 $\lambda^*(X) = \infty$, 对每一个整数 i, 令 $X_i = X \cap [i, i+1)$, 那么 $\lambda^*(X_i) < \infty$, 故可取一个可测的 $B_i \supseteq X_i$ 以至于 $\lambda(B_i) = \lambda^*(X_i)$; 然后令 $B = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} B_i$, 此集合 B 是一个可测集, 并且 $B \supseteq X$ 以及 $B - X$ 的任何可测子集都是零测集. □

根据极小覆盖引理 (引理 3.21), 对于每个 $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, 取一个可测的 $B_s \supseteq A_s$ 以至于 $(B_s - A_s)$ 的任何可测子集都是零测集; 由于 $\overline{A_s}$ 是可测集, 可取这样的 B_s 进一步满足不等式 $A_s \subseteq B_s \subseteq \overline{A_s}$.

我们来证 $B_\varnothing - A$ 是一个零测集. 由此便知 A 是可测的: $A = B_\varnothing - (B_\varnothing - A)$.

根据不等式 $A_s \subseteq B_s \subseteq \overline{A_s}$ 以及上述应用苏斯林运算的等式, 我们就有

$$A = \mathscr{A}\left(\left\{B_s \;\middle|\; s \in \mathbb{N}^{<\omega}\right\}\right).$$

于是, 令 $B = B_\varnothing$,

$$B - A = B - \bigcup_{a\in\mathcal{N}} \bigcap_{n<\omega} B_{a\restriction_n}.$$

现在我们断言下述不等式成立：

$$\left(B - \bigcup_{a \in \mathcal{N}} \bigcap_{n<\omega} B_{a \restriction_n}\right) \subseteq \bigcup_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}} \left(B_s - \bigcup_{k<\omega} B_{s+\langle k \rangle}\right).$$

欲见此不等式，设 $x \in B$ 但是 x 不在上面不等式的右端之集合. 这就意味着对于每一个 $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, 如果 $x \in B_s$, 则必有一个自然数 k 见证 $x \in B_{s+\langle k \rangle}$. 从 $s = \varnothing$ 开始，递归地得到一个序列 $a = \langle k_i \mid i < \omega \rangle$ 以至于关系式

$$\forall i < \omega \; (x \in B_{a \restriction_i})$$

成立. 因此, $x \in \bigcap_{n<\omega} B_{a \restriction_n}$. 这就表明 x 也就不在上述不等式的左边.

根据上述不等式，我们就有

$$B - A \subseteq \bigcup_{s \in \mathbb{N}^{<\omega}} \left(B_s - \bigcup_{k<\omega} B_{s+\langle k \rangle}\right).$$

欲得 $B - A$ 是一个零测集，根据上述不等式，我们只需证明每一个 $B_s - \bigcup_{k<\omega} B_{s+\langle k \rangle}$ 都是零测集.

固定 $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, 令 $Z = B_s - \bigcup_{k<\omega} B_{s+\langle k \rangle}$. 有

$$Z = B_s - \bigcup_{k<\omega} B_{s+\langle k \rangle} \subseteq B_s - \bigcup_{k<\omega} A_{s+\langle k \rangle} = B_s - A_s.$$

根据 B_s 的选择, Z 又是可测的，所以 Z 是一个零测集.

这就证明了 $B - A$ 是一个零测集，从而解析集 A 是可测集. (1) 因此得证.

(2) 的证明和 (1) 的证明类同，只是我们需要下述极小覆盖引理：

引理 3.22 设 X 是一个波兰空间. 如果 $Y \subseteq X$ 是任意一个子集，那么必定存在一个具备贝尔性质的 $B \supseteq Y$ 以至于 $B - Y$ 的所有具备贝尔性质的子集合一定都是稀疏集合.

欲见此极小覆盖引理，令 O 为 X 的一个可数拓扑基 (基本开集之集合). 设 $Y \subseteq X$ 为任意一个子集合. 令

$$D(Y) = \left\{x \in X \mid \forall U \in O \; (x \in U \to U \cap Y \text{ 不是稀疏子集})\right\},$$

那么 $X - D(Y)$ 是可数个开集之并，所以是一个开集. 因此, $D(Y)$ 是一个闭集.

令 $B = Y \cup D(Y)$. 我们来验证此集合 B 就是所要的.

集合 $Y - D(Y) = \bigcup\{Y \cap U \mid U \in O \wedge Y \cap U \text{ 是稀疏子集}\}$. 因为 O 可数，所以, $Y - D(Y)$ 是一个稀疏子集. 由于 $B = Y \cup D(Y) = (Y - D(Y)) \cup D(Y)$ 是一个稀疏子集和一个闭集之并, B 具有贝尔性质.

设 $Z \subseteq (B-Y)$ 为一个具有贝尔性质的集合, 我们断言 Z 一定是稀疏子集. 假设不然. 令 $U \in O$ 来见证 $U-Z$ 是稀疏子集, 于是, $U \cap Y$ 是稀疏子集. 由于 $U \cap Z \neq \varnothing$ 以及 $Z \subset D(Y)$, 可取一个 $x \in U \cap D(y)$. 由 $D(Y)$ 的定义可知 $U \cap Y$ 不会是稀疏子集. 这就是一个矛盾. 因此, Z 必定是一个稀疏子集. □

在此基础上, 我们将 (2) 的详细证明留给读者.

(3) 这个证明其实是贝尔空间上关系闭子集分析的翻版. 这很自然, 因为解析子集都是贝尔空间的连续像.

设 A 是波兰空间 X 的一个不可数解析子集. 设 $f: \mathcal{N} \to X$ 为一个连续函数, 并且 $A = f[\mathcal{N}]$. 对于树 $(\mathbb{N}^{<\omega}, \leqslant)$ 的子树 T, 按照如下等式对 T 求导:

$$T' = \{t \in T \mid |f[T_t]| > \aleph_0\},$$

其中 $T_t = \{s \in T \mid s \subseteq t \vee t \subseteq s\}$. 递归地, 我们定义如下序列: 对于 $\alpha < \omega_1$,

(i) $T^{(0)} = \mathbb{N}^{<\omega}$;

(ii) $T^{(\alpha+1)} = \left(T^{(\alpha)}\right)'$;

(iii) 当 $\alpha < \omega_1$ 是一极限序数时, $T^{(\alpha)} = \bigcap_{\beta<\alpha} T^{(\beta)}$.

令 $\alpha < \omega_1$ 为满足等式 $T^{(\alpha+1)} = T^{(\alpha)}$ 的最小序数.

如果 $T^{(\alpha)} = \varnothing$, 那么

$$A = \bigcup_{\beta<\alpha} \left\{ f\left[T_s^{(\beta)}\right] \;\middle|\; s \in \left(T^{(\beta)} - T^{(\beta+1)}\right) \right\},$$

因而 A 是一个可数集合. 但是, A 是一个不可数的解析集合. 所以 $T^{(\alpha)} \neq \varnothing$.

据此我们知道: $\forall s \in T^{(\alpha)}\ \left|f\left[T_s^{(\alpha)}\right]\right| > \aleph_0$. 在此基础上, 我们来寻找 A 的一个完备子集.

设 $s \in T^{(\alpha)}$. 此时集合 $f\left[T_s^{(\alpha)}\right]$ 不可数, 我们在 $T_s^{(\alpha)}$ 中取出两个节点 $s_{\langle 0\rangle} \supset s$ 以及 $s_{\langle 1\rangle} \supset s$ 来保证 $f\left[T_{s_{\langle 0\rangle}}^{(\alpha)}\right]$ 与 $f\left[T_{s_{\langle 1\rangle}}^{(\alpha)}\right]$ 不相交. 基于同样的理由, 我们可以继续分裂下去: 得到

$$s_{\langle 0,0\rangle} \supset s_{\langle 0\rangle} \wedge s_{\langle 0,1\rangle} \supset s_{\langle 0\rangle}$$

以及

$$s_{\langle 1,0\rangle} \supset s_{\langle 1\rangle} \wedge s_{\langle 1,1\rangle} \supset s_{\langle 1\rangle}$$

来保证四个集合 $f\left[T_{s_{\langle i,j\rangle}}^{(\alpha)}\right]$ $(i,j \in \{0,1\})$ 彼此不相交. 以此类推, 对于 $\sigma \in \mathbb{N}^{<\omega}$, 我们可以找到 $s_\sigma \in T^{(\alpha)}$ 以及由此确定的集合 $f\left[T_{s_\sigma^{(\alpha)}}\right]$. 这样, 我们得到与完备二叉树 $(2^{<\omega}, \leqslant)$ 同构的 $T^{(\alpha)}$ 的一棵子树:

$$U = \left\{ s \in T^{(\alpha)} \;\middle|\; \exists \sigma \in 2^{<\omega}\ (s \subseteq s_\sigma) \right\},$$

从而 $[U]$ 是 $\mathcal{N}$ 的一个紧致集合, 并且 $f\restriction_{[U]}$ 是一个单射. 令 $P = f[[U]]$. 那么 $P \subset A$ 是一个紧致集合, 从而是一个闭子集; P 也没有孤立点. 所以 $P \subset A$ 是一个完备子集. □

由定理 3.28 我们立即得到下述推论:

推论 3.7 (1) 每一个 $\mathbf{\Pi}_1^1$ 实数子集合都是勒贝格可测的, 并且也都具有贝尔性质.

(2) 每一个解析集合 (尤其是博雷尔集合) 或者至多可数, 或者具有连续统的势. 换句话说, 博雷尔集合与解析集合都不会是连续统假设的反例.

看过上述推论后一个有关余解析集的问题便油然而生.

问题 3.8 一个不可数的 $\mathbf{\Pi}_1^1$ 实数集合是否包含完备子集? 是否可以成为连续统假设的反例?

后面在本《导引》的最后一章里我们将看到这个问题的答案与论域中大基数的存在性相关联.

当然, 在证明上述正则性定理 (定理 3.28) 之后, 我们也很自然地不禁发问:

问题 3.9 是否每一个投影集合也都有解析集合所持有的那些正则特性呢?

在本《导引》的最后一章我们将来探讨这个问题的答案.

3.6.5 贝尔空间博弈论

在贝尔空间 $\mathcal{N}$ 上可以引进一种无穷博弈以是否存在稳赢方来刻画贝尔空间的子集. 具体而言,

定义 3.31 (赛局) 设 $A \subseteq \mathcal{N}$. 定义由 A 所确定的**赛事** $\mathscr{G}_A$ 的一个**赛局过程**如下: 赛局中有两位比赛者, 张三和李四, 依次轮流写出一个自然数:

张三	a_0		a_1		$\cdots$		a_n		$\cdots$ $\cdots$
李四		b_0		b_1		$\cdots$		b_n	$\cdots$

在经过 ω 步之后, 张三写出了一个实数

$$x = \langle a_n \mid n < \omega \rangle,$$

李四也写出了一个实数

$$y = \langle b_n \mid n < \omega \rangle,$$

综合他们二位的结果, 得到一个无穷序列

$$x * y = \langle a_0, b_0, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n, \cdots \rangle.$$

称此序列 $x * y$ 为一个**赛局**; 并且规定本赛局的输赢标准为: 如果 $x * y \in A$, 那么张三赢得本局; 如果 $x * y \notin A$, 那么李四赢得本局.

在这样的比赛中, 什么是参赛者可以使用的策略呢?

定义 3.32 (策略) (1) 张三可以使用的一个**策略**是如下的一个函数 σ:

$$\sigma : \bigcup \left\{ (\omega)^{2n} \mid n < \omega \right\} \to \omega;$$

就是说, 张三可以使用的策略是那些定义在所有长度为偶数的自然数序列上的自然数函数;

(2) 李四可以使用的一个**策略**是如下的一个函数 τ:

$$\tau : \bigcup \left\{ (\omega)^{2n+1} \mid n < \omega \right\} \to \omega;$$

就是说, 李四可以使用的策略是那些定义在所有长度为奇数的自然数序列上的自然数函数.

在参赛者可以使用的策略中, 什么样的策略是参赛者的一种胜算 (胜券、稳赢策略)?

定义 3.33 (1) 设 σ 是张三可以使用的一个策略. 称张三在一个赛局中**使用了策略** σ 当且仅当张三在本次比赛中每一步都按照 σ 的计算做出应对, 即

$$\forall n < \omega \ \left((x * y)(2n) = \sigma\left((x * y) \restriction_{2n}\right)\right),$$

其中 $x * y$ 是本次赛局的产物.

(2) 设 τ 是李四可以使用的一个策略. 称李四在一个赛局中**使用了策略** τ 当且仅当李四在本次比赛中每一步都按照 τ 的计算做出应对, 即

$$\forall n < \omega \ \left((x * y)(2n+1) = \tau\left((x * y) \restriction_{(2n+1)}\right)\right),$$

其中 $x * y$ 是本次赛局的产物.

(3) 设 σ 是张三可以使用的一个策略. 称 σ 是张三在赛事 $\mathscr{G}_A$ 中的一个**胜算 (胜券、稳赢策略)** 当且仅当在本赛事中的每一个赛局中, 只要张三使用了策略 σ, 那么张三就一定赢得本次赛局.

(4) 设 τ 是李四可以使用的一个策略. 称 τ 是李四在赛事 $\mathscr{G}_A$ 中的一个**胜算 (胜券、稳赢策略)** 当且仅当在本赛事中的每一个赛局中, 只要李四使用了策略 σ, 那么李四就一定赢得本次赛局.

设 $x * y$ 是一个赛局. 那么

(1) 张三在本赛局中使用了策略 σ 当且仅当

$$\forall n < \omega \ \left(x(n) = \sigma\left(\langle x(0), y(0), \cdots, x(n-1), y(n-1)\rangle\right)\right).$$

(2) 李四在本赛局中使用了策略 τ 当且仅当

$$\forall n < \omega \ \left(y(n) = \tau\left(\langle x(0), y(0), \cdots, x(n-1), y(n-1), x(n)\rangle\right)\right).$$

因此, 在一个赛事 $\mathscr{G}_A$ 中, 如果张三坚持使用策略 σ, 那么每一个赛局 $x * y$ 都完全由策略 σ 和李四在本赛局中的应对 y 完全确定; 此种情形下, 我们就用记号 $\sigma \star y$ 来记本局 $x * y$, 即

$$\sigma \star y = x * y.$$

如果李四坚持使用策略 τ, 那么每一个赛局 $x * y$ 都完全由策略 τ 和张三在本赛局中的应对 x 完全确定; 此种情形下, 我们就用记号 $x \star \tau$ 来记本局 $x * y$, 即

$$x \star \tau = x * y.$$

这样, 张三可以使用的策略 σ 是他在赛事 $\mathscr{G}_A$ 中的一个胜算当且仅当

$$\{\sigma \star y \mid y \in \mathcal{N}\} \subset A;$$

李四可以使用的策略 τ 是他在赛事 $\mathscr{G}_A$ 中的一个胜算当且仅当

$$\{x \star \tau \mid x \in \mathcal{N}\} \cap A = \varnothing.$$

无穷博弈首先由 Mazur 在 1930 年引入以期建立起一个赛事 $\mathscr{G}_A$ 有稳赢方与实数集合 A 是否有贝尔性质之间的内在联系. 他的这一猜想由 Banach 所证明[4].

例 3.7 (Banach-Mazur 赛事) 设 $X \subset \mathcal{N}$. 由 X 所确定的 Banach-Mazur 赛事 $\mathscr{G}_X^*$ 定义如下: 张三与李四依次轮流出示一个延伸前者的自然数有限序列,

$$s_0 \subset t_0 \subset s_1 \subset t_1 \subset \cdots \subset s_n \subset t_n \subset \cdots,$$

其中 s_i 是张三在轮到他反应时所出示的有限序列, t_i 则是李四在轮到他反应时出示的有限序列; 赛事的规则是所出示的序列必须延伸对手所出示的序列; 谁犯规, 谁输掉本局; 当两位都不曾犯规, 在经历了 ω 步之后, 他们合作产生一个实数

$$x = \bigcup \{ s_i \mid i < \omega \} = \bigcup \{ t_i \mid i < \omega \},$$

如果 $x \in X$, 那么张三赢得本赛局; 如果 $x \notin X$, 那么李四赢得本赛局.

Banach-Mazur 赛事看起来与前面我们所定义的赛事不相同, 但可以将这种赛事转化成前者. 具体转化如下：固定一个有关 $\omega^{<\omega}$ 的递归单一列表

$$\langle u_k \mid k < \omega \rangle = \omega^{<\omega}.$$

利用这一列表, 建立起一种对应：

$$\mathcal{N} \ni f \mapsto \left\langle u_{f(0)}, u_{f(1)}, \cdots, u_{f(n)}, \cdot \right\rangle \in \left(\omega^{<\omega}\right)^{\omega},$$

4 S. Banach, Über additive Massfunctionen in abstrakten Mengen, Fund. Math., 1930, 15: 97-101.

给定 X 和由它所确定的赛事 $\mathscr{G}_X^*$, 令赛局

$$\langle a_0, b_0, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n, \cdots\rangle$$

为集合 A 中的元素当且仅当或者 $\exists n<\omega\ (u_{a_0}\subset u_{b_0}\subset\cdots\subset u_{a_n}\not\subset u_{b_n})$ (对应的赛局里, 李四先犯规); 或者一定有

$$u_{a_0}\subset u_{b_0}\subset\cdots\subset u_{a_n}\subset u_{b_n}\subset\cdots,$$

并且令

$$x=\bigcup\{\,u_{a_i}\mid i<\omega\}=\bigcup\{\,u_{b_i}\mid i<\omega\},$$

那么 $x\in X$. 然后再考虑由此 A 所确定的赛事 $\mathscr{G}_A$. 那么, 张三在赛事 $\mathscr{G}_X^*$ 中有稳赢策略当且仅当张三在赛事 $\mathscr{G}_A$ 中有稳赢策略.

定理 3.29 (巴拿赫) 设 $X\subset\mathcal{N}$. 对于 $s\in\omega^{<\omega}$, 令

$$N_s=\{a\in\mathcal{N}\mid s\subset a\}$$

为由 s 所确定的基本开集.

(1) 李四在赛事 $\mathscr{G}_X^*$ 中稳操胜券当且仅当 X 是一个稀疏子集;

(2) 张三在赛事 $\mathscr{G}_X^*$ 中稳操胜券当且仅当存在一个 $s\in\omega^{<\omega}$ (N_s-X) 是稀疏子集.

证明 (1) 令 $Y=\mathcal{N}-X$.

先证充分性. 设 X 是一个稀疏集. 令

$$\langle G_n\mid n<\omega\rangle$$

为可数个稠密开集以至于 $Y\supset\bigcap\{G_n\mid n<\omega\}$. 我们来为李四设计一个稳赢策略 τ: 当张三出示 s_0 时, 考虑开集 $N_{s_0}\cap G_0$, 这是一个非空开集, 因为 G_0 是一个稠密开集, 令 t_0 满足 $N_{t_0}\subset N_{s_0}\cap G_0$. 于是定义

$$\tau(\langle s_0\rangle)=t_0.$$

当张三出示 $s_1\supset t_0$ 时, 考虑开集 $N_{s_1}\cap G_1$, 这是一个非空开集, 于是可取一个 t_1 来满足 $N_{t_1}\subset N_{s_1}\cap G_1$. 然后定义

$$\tau(\langle s_0,t_0,s_1\rangle)=t_1.$$

递归地, 假设赛局过程已经顺利完成 n 步, 局面为

$$s_0\subset t_0\subset s_1\subset t_1\subset\cdots\subset s_n\subset t_n,$$

轮到张三出示他的选择. 他不愿意轻易输掉本局, 因为他很容易选择一个 $s_{n+1} \supset t_n$. 当张三出示 $s_{n+1} \supset t_n$ 时, 考虑开集 $N_{s_{n+1}} \cap G_{n+1}$. 同样地, 这是一个非空开集. 故可以取到一个 t_{n+1} 来满足 $N_{t_{n+1}} \subset N_{s_{n+1}} \cap G_{n+1}$. 于是, 定义

$$\tau(\langle s_0, t_0, s_1, \cdots, s_n, t_n, s_{n+1}\rangle) = t_{n+1}.$$

这为李四设计了一个可用的策略 τ. 我们来证明 τ 是李四的稳赢策略. 现在假设在赛局中张三从不犯规 (他用不着犯傻轻易输掉), 并且李四按照上面的设计策略应对每一步挑战. 令

$$x = \bigcup\{s_i \mid i < \omega\} = \bigcup\{t_i \mid i < \omega\}.$$

那么 $x \in \bigcap\{G_n \mid n < \omega\}$. 由此可见, τ 是李四的一个胜算.

再证必要性. 设 τ 是李四的一个稳赢策略. 称 $(\omega^{<\omega})^{<\omega}$ 中的一个元素为一个**正确位置**当且仅当它是满足下述要求的序列:

(a) 其长度为偶数, 比如 $\sigma = \langle s_0, t_0, \cdots, s_n, t_n\rangle$;

(b) 到此为止, 谁也没有犯规, 即 $s_0 \subset t_0 \subset \cdots \subset s_n \subset t_n$;

(c) 到此为止, 李四使用他的稳赢策略 τ, 即 $\forall i < n\,(t_i = \tau(\sigma\restriction_{2i+1}))$.

断言 *设 $x \in \mathcal{N}$. 假设对于任意的一个正确位置 $\sigma = \langle s_0, t_0, \cdots, s_n, t_n\rangle$ 而言, 如果 $t_n \subset x$, 那么必有 $s \supset t_n$ 以至于 $\tau(\widehat{\sigma, s}) \subset x$. 那么 $x \in Y$.*

设 $x \in \mathcal{N}$ 满足断言中的假设条件. 我们来证明此 $x \in Y$. 首先, 存在 s_0 满足 $\tau(\langle s_0\rangle) \subset x$. 令 $t_0 = \tau(\langle s_0\rangle)$. 那么 $p_0 = \langle s_0, t_0\rangle$ 是一个正确位置. 根据假设条件, 存在 s_1 来满足 $\tau(\langle s_0, t_0, s_1\rangle) \subset x$. 于是令 $t_1 = \tau(\langle s_0, t_0, s_1\rangle)$. 这样又得一个正确位置 $p_1 = \langle s_0, t_0, s_1, t_1\rangle$. 如此令对局的每一步都与 x 相吻合: 给定正确位置 p_n, 选 s_{n+1} 来满足 $\tau(p_n + \langle s_{n+1}\rangle) \subset x$; 再令

$$t_{n+1} = \tau(p_n + \langle s_{n+1}\rangle),$$

从而得到正确位置 $p_{n+1} = \langle s_0, t_0, \cdots, s_{n+1}, t_{n+1}\rangle$. 这样得到的赛局

$$s_0 \subset t_0 \subset s_1 \subset t_1 \subset \cdots \subset s_n \subset t_n \subset \cdots$$

收敛于 x. 由于赛局过程中谁也没有犯规, 并且李四又是按照他的稳赢策略对应每一步挑战, 所以最终李四赢得本赛局. 这就意味着 $x \in Y$.

断言于是得证.

设 $p = \langle s_0, t_0, \cdots, s_n, t_n\rangle$ 是一个正确位置. 令

$$F_p = \{x \in \mathcal{N} \mid t_n \subset x \wedge \forall s \supset t_n\ (\tau(p + \langle s\rangle) \not\subset x)\}.$$

根据上述断言, 对于每一个 $x \in X$, 必有一个正确位置 p 来实现 $x \in F_p$. 也就是说,

$$X \subset \bigcup \{ F_p \mid p \text{是一个正确位置} \}.$$

另一方面, 如果 $p = \langle s_0, t_0, \cdots, s_n, t_n \rangle$ 是一个正确位置, 那么 $N_{t_n} - F_p$ 在 N_{t_n} 中是一个稠密开子集, 因此, F_p 是一个无处稠密的闭子集. 由于正确位置的全体只有可数多个, 所以 X 是一个稀疏集.

(2) 注意, 张三在赛事 $\mathscr{G}_X^*$ 中有一个稳赢策略当且仅当存在一个 $s \in \omega^{<\omega}$ (张三的先行第一步) 以至于李四在下述对局中有一个稳赢策略: 张三出示 $t_0 \supset s$; 李四应对 $s_0 \supset t_0$; 张三应对 $t_1 \supset s_0$; 李四应对 $s_1 \supset t_1$; 等等; 并且规定张三赢得此局当且仅当赛局所得序列收敛于 x, 此 $x \in (N_s - X)$. 根据 (1), 李四在这样的赛事中有稳赢策略的充分必要条件是 $(N_s - X)$ 是一个稀疏集. □

前面定义的一般性赛事则是 Gale 和 Stewart 在他们 1953 年的文章[5] 中首先探讨的. 下面的开 (闭) 集的胜负确定性命题以及在选择公理之下必有不分胜负之赛事的定理都是他们的结果.

现在我们再来看看一般情形下的输赢问题.

命题 3.9 设 $A \subseteq \mathcal{N}$ 是一个开集, 在赛事 $\mathscr{G}_A$ 中如果张三没有任何稳赢策略, 那么李四一定有一个稳赢策略.

证明 设 $A \subseteq \mathcal{N}$ 为一个开集, 并且假设在赛事 $\mathscr{G}_A$ 中张三没有稳赢策略. 我们来证明李四必有一个稳赢策略.

当张三写出 a_0 时, 一定存在一个 $b_0 \in \mathbb{N}$ 以至于在接下来的赛事 $\mathscr{G}_A^{\langle a_0, b_0 \rangle}$ 的任何一个赛局

张三	a_1		a_2		$\cdots$		a_n		$\cdots$	$\cdots$
李四		b_1		b_2		$\cdots$		b_n		$\cdots$

中, 张三还是没有稳赢策略来保证 $\langle a_0, b_0, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n, \cdots \rangle \in A$, 李四就写出这样的一个 $b_0 \in \mathbb{N}$. 此时李四处于还没有输的位置 $\langle a_0, b_0 \rangle$ 上. 换句话说, 由于张三没有稳赢策略, 无论张三在第一步上写出什么自然数 a_0, 李四都有一个还没有输掉的位置 $\langle a_0, b_0 \rangle$. 李四该做的就是不犯错误, 一定要占据这样的还没有输掉的位置. 接下来, 当张三写出 $a_1 \in \mathbb{N}$ 时, 同样存在一个 $b_1 \in \mathbb{N}$ 以至于李四还没有在这个位置 $\langle a_0, b_0, a_1, b_1 \rangle$ 上输掉. 李四自然就选择这样一个 b_1 来占据一个还没有输掉的位置, 以此类推. 给定李四还没有输掉的一个位置 $\langle a_0, b_0, \cdots, a_{n-1}, b_{n-1} \rangle$, 当张三写出 a_n

5 D. Gale, F. M. Stewart, Infinite Games with perfect information, in "Contributions to the Theory of Games", Vol. 2, Ann. of Math. Studies, No. 28, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1953: 245-266.

时,

$$\exists b_n \in \mathbb{N}\, \forall \sigma \left(\begin{array}{l} \sigma \text{ 是张三可以使用的一个策略} \rightarrow \\ (\exists y \in \mathcal{N}\ ((\langle a_0, b_0, \cdots, a_n, b_n\rangle + \sigma \star y) \notin A)) \end{array} \right).$$

李四取一个这样的 b_n 作为应对. 那么位置 $\langle a_0, b_0, \cdots, a_{n-1}, b_{n-1}, a_n, b_n\rangle$ 就是李四的一个不败之地. 所以, 李四的策略就是：每一步都选取一个保证自己处于不败之地的自然数来应对. 由于张三没有稳赢策略, 任何时候李四都有这样一个选择.

设 $x * y$ 是一个赛局, 其中李四按照上述策略应对. 我们来证明 $x * y \notin A$. 假如不然, 因为 A 是开集, 令 $n < \omega$ 足够大以至于

$$N_{(x*y)\restriction_{2n}} \subset A.$$

可是, 这就意味着位置 $(x * y) \restriction_{2n}$ 并非李四的一个不败之地. □

命题 3.10 *设 $A \subseteq \mathcal{N}$ 是一个闭集. 在赛事 $\mathscr{G}_A$ 中如果李四没有任何稳赢策略, 那么张三一定有一个稳赢策略.*

证明 设 $A \subseteq \mathcal{N}$ 为一个闭集, 并且假设在赛事 $\mathscr{G}_A$ 中李四没有稳赢策略, 我们来证明张三必有一个稳赢策略. 设 T 是 ω 上的一棵树来实现 $A = [T]$.

首先, 必有一个 $a \in \mathbb{N}$ 以至于 $\langle a\rangle \in T$, 并且在闭子集 $\left[T_{\langle a\rangle}\right]$ 上李四没有稳赢策略, 否则, 将每一个这样的闭集上的稳赢策略并起来就是李四在赛事 $\mathscr{G}_A$ 中的稳赢策略, 也就是说存在这样的一个使张三处于不败之地的 a. 张三取出这样的一个自然数作为他的 a_0. 这样在赛事 $\mathscr{G}_{N_{\langle a_0\rangle}-[T]}$ 上, 两位参赛者角色互换了. 因为 $N_{\langle a_0\rangle} - [T]$ 是一个开集, 李四需要保证接下来的赛局在此集合中, 而他又没有稳赢策略, 所以, 重复上面命题 3.9 的证明, 只要张三每次选择立于不败之地, 张三就稳赢. □

根据上面的例子, 我们不妨引进下述概念：

定义 3.34 *称子集合 $A \subseteq \mathcal{N}$ 是一个***胜负确定集合***当且仅当在赛事 $\mathscr{G}_A$ 中或者张三稳操胜券, 或者李四稳操胜券.*

上面的命题表明所有的开 (闭) 集都是胜负确定集合. 当然, 无论何赛事 $\mathscr{G}_A$, 不可能有两位赢家. 现在的问题是：是否必有赢家?

定理 3.30 *选择公理蕴涵必定存在胜负未定的集合.*

证明 令 $\left\{\sigma_\alpha \mid \alpha < 2^{\aleph_0}\right\}$ 为张三全部可以使用的策略的单一列表; 令

$$\left\{\tau_\alpha \mid \alpha < 2^{\aleph_0}\right\}$$

为李四全部可以使用的策略的单一列表.

我们如下递归地构造

$$X = \left\{x_\alpha \mid \alpha < 2^{\aleph_0}\right\} \wedge Y = \left\{y_\alpha \mid \alpha < 2^{\aleph_0}\right\}.$$

给定 $X_\alpha = \{x_\xi \mid \xi < \alpha\}$ 以及 $Y_\alpha = \{y_\xi \mid \xi < \alpha\}$. 在集合 $\{\sigma_\alpha \star b \mid b \in \mathcal{N}\}$ 中取一个不在 X_α 中的元素为 y_α (因为前者势为 $2^{\aleph_0}$, 后者势严格小于 $2^{\aleph_0}$, 一定可以取到); 在集合 $\{a \star \tau_\alpha \mid a \in \mathcal{N}\}$ 中取一个不在 $Y_\alpha \cup \{y_\alpha\}$ 中的元素为 x_α.

这样, $X \cap Y = \varnothing$, 并且

$$\forall \alpha < 2^{\aleph_0}\, \exists b \in \mathcal{N}\ (\sigma_\alpha \star b \notin X)$$

以及

$$\forall \alpha < 2^{\aleph_0}\, \exists a \in \mathcal{N}\ (a \star \tau_\alpha \in X).$$

这表明在赛事 $\mathscr{G}_X$ 中, 无论是张三还是李四都没有胜算. 所以, X 是胜负未定的集合. □

自然, 什么样的集合会是胜负确定的集合就是一个很有吸引力的问题. 在 ZFC 理论下, 能够被证明的定理是马丁的博雷尔确定性定理. 由于篇幅所限, 我们只能忍痛割爱, 将它的证明略去. 有兴趣的读者可参见文献 6.

定理 3.31 (马丁) *所有的博雷尔集合都是胜负确定的集合.*

证明 (略.) □

在知道所有的博雷尔集合都是胜负确定集合之后, 即刻面临的问题自然就是: 解析集是否为胜负确定集合? 更为复杂的投影集合的情形又当如何. 对于这些问题的解答, 我们暂且按下不表, 留待第三卷时专门讨论.

开区分特性

在讨论组合原理中的划分定理时, 我们看到过瑟秉斯基的例 2.23. 那个例子表明在选择公理之下, 存在一个 $f : [\mathcal{N}]^2 \to \{0,1\}$ 以至于不会有 $\mathcal{N}$ 的不可数的 f-整齐子集. 由此产生一个很有趣的问题：假如说将实平面做一种简单的分划情形将怎样? 下面我们来探讨一下开闭分划问题. 我们希望应用无穷博弈来揭示解析集所持有的另外一种正则性：**开区分特性**. 这是一种比完备集特性更强的组合特性.

定义 3.35 (开区分特性) *设 $X \subseteq \mathbb{R}$ 非空, 将 $[X]^2$ 与实平面 $\mathbb{R}$ 中主对角线上面的点等同起来, 即*

$$[X]^2 = \{(a,b) \mid a \in X \wedge b \in X \wedge a < b\}.$$

*称 $K \subset [X]^2$ 为一个**相对开集**当且仅当存在 $\mathbb{R}^2$ 上的一个开集 B 来实现等式*

$$K = B \cap [X]^2.$$

*称 X 具有**开区分特性**当且仅当对于 $[X]^2$ 的任意一个相对开子集 $K_0 \subseteq [X]^2$ 而言, 要么存在一个完备子集 $P \subset X$ 来满足 $[P]^2 \subset K_0$ (此种情形下称 P 为开区*

6 D. Martin, Borel determinacy, Ann. of Math., 1975, 102(2): 363-371.

分 K_0 下 X 的**开整齐子集**, 或者 0-整齐子集), 要么 X 可以分解成可数个子集合 $X_n\,(n<\omega)$ 的并

$$X=\bigcup\{\,X_n\mid n<\omega\}$$

以至于 $\forall n<\omega\,\Big([X_n]^2\subset\big([X]^2-K_0\big)\Big)$ (此种情形下称每一个 X_n 为开区分 K_0 下 X 的**闭整齐子集**, 或者 1-整齐子集).

应用开–闭–整齐子集的术语, 一个集合 $X\subset\mathbb{R}$ 具有开区分特性当且仅当对于任意相对开集 $K\subset[X]^2$ 而言, 要么 X 包含一个完备开整齐子集, 要么 X 是可数个闭整齐子集的并.

将 $\mathbb{R}$ 上的所有的具有开区分特性的子集收集起来就可以得到一个具有良好封闭特性的集合:

引理 3.23 令 $\Gamma=\{X\subset\mathbb{R}\mid X$ 具有开区分特性$\}$, 那么

(1) 如果每一个 $X_n\in\Gamma\,(n<\omega)$, 那么 $\bigcup\{X_n\mid n<\omega\}\in\Gamma$;

(2) 如果 $X\in\Gamma$, $f:X\to\mathbb{R}$ 是一个连续函数, 那么 $f[X]\in\Gamma$;

(3) 如果 $X\in\Gamma$, $Y\subset\mathbb{R}$, 并且 $|X\triangle Y|\leqslant\aleph_0$, 那么 $Y\in\Gamma$, 其中

$$X\triangle Y=(X-Y)\cup(Y-X).$$

证明 (练习.) □

应当看到开区分特性中开与闭的完全不对称现象. 事实上有例子表明这种不能调换结论的非对称性. 为了圆满, 下面我们展示 Todorceivic 所构造的一个例子[7], 而将其证明留给读者.

例 3.8 对于每一个 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, 按照如下方法计算出一个收敛于 f 的序列 $\langle f_n\mid n<\omega\rangle$:

对于每一个 $i<\omega$, 令 $f_i\restriction_i=f\restriction_i$; 对于 $j<\omega$, 令 $f_i(i+j)=f\left(2^{i+1}(2j+1)\right)$.

对于 $f,g\in\mathcal{N}$, $f\neq g$, 令

$$\{f,g\}\in K\iff\forall i<\omega\ \left(f\neq g_i\wedge g\neq f_i\right).$$

那么

(1) K 是 $[\mathcal{N}]^2$ 上的一个相对开集;

(2) $\mathcal{N}$ 不是可数个开整齐子集的并;

(3) 如果 $X\subset\mathcal{N}$ 不可数, 那么 X 中必然有两个不相等的 f 和 g 满足 $\{f,g\}\in K$.

下面我们来揭示解析集具有开区分特性[8].

7 S. Todorceivic, Two examples of Borel partially ordered sets with countable chain conditions, preprint, 1990

8 Q. Feng, Homogeneity for open partitions of pairs of reals, Transactions of the American Mathematical Society, 1993, 339(2): 659-684.

定理 3.32 (冯) 如果 $A \subset \mathbb{R}$ 是一个解析集, 那么 A 具有开区分特性.

上述定理的确蕴涵着不可数的解析集合必然包含一个完备子集: 给定一个不可数的解析集合 A, 考虑 $K = [A]^2$ 这个相对开集. 那么 A 不可能是可数个闭整齐子集的并. 所以, A 一定包含了一个完备开整齐子集. 当然, 这个定理还有其他有趣的推论. 这些推论通常都不由完备子集性质所提供. 比如, 定义在一个解析子集上的实函数要么在一个完备子集上严格单调递增, 要么在一个完备子集上严格单调递减, 要么是可数个常值函数的并. 由于篇幅所限, 我们就不在这里啰嗦了.

下面我们来为定理的证明做适当的准备. 读者会看到, 一旦这种准备工作完成, 定理几乎是不证自明的. 首先, 我们需要设计一种可以揭示开区分特性的赛事; 然后证明类似于巴拿赫定理 (定理 3.29) 将稀疏特性与某人的稳赢策略联系起来的结论: 将开区分特性中的两种相互排斥的结论与赛事中某人的稳赢策略联系起来; 最后应用 Gale-Stewart 的开集确定性来得到所需要的结论.

下面我们将考虑康托尔空间 2^ω, 以及它上面的拓扑, 其基本开集是形如 N_s 的集合, 其中

$$\left(s \in 2^{<\omega}\right) \;\wedge\; N_s = \{x \in 2^\omega \mid s \subset x\}.$$

同时, 对于 $2 = \{0,1\}$ 上的非空有限序列 $s \in 2^{<\omega}$ 和 $t \in 2^{<\omega}$, 我们定义 $s+t$ 为下述 $\{0,1\}$ 上的长度为 $\mathrm{dom}(s)+\mathrm{dom}(t)$ 的序列, 并且对于 $i < \mathrm{dom}(s)+\mathrm{dom}(t)$, 必有

$$(s+t)(i) = \begin{cases} s(i) & \text{如果 } i < \mathrm{dom}(s), \\ t(i-\mathrm{dom}(s)) & \text{如果 } \mathrm{dom}(s) \leqslant i < \mathrm{dom}(s)+\mathrm{dom}(t). \end{cases}$$

这是 $2^{<\omega}$ 上的一个满足结合律但不满足交换律的二元运算 (一个有单位元的半群, 如果读者愿意).

例 3.9 (开区分赛事) 设 $X \subseteq 2^\omega$. 设 $K \subseteq [X]^2$ 为一个相对开集. 由 X 和 K 所确定的赛事 $\mathscr{G}(X,K)$ 定义如下: 张三先行; 李四紧随; 二者依次轮流出示自己的应对:

张三	(s_0^0, s_1^0)	(s_0^1, s_1^1)	$\cdots$	(s_0^n, s_1^n)	$\cdots$	$\cdots$
李四	i_0	i_1	$\cdots$	i_n	$\cdots$	

在第 n 步时各自应对的规则如下:

(a) $i_n \in \{0,1\}$;

(b) $(s_0^n, s_1^n) \in \left((2^{<\omega} - \{\varnothing\}) \times (2^{<\omega} - \{\varnothing\})\right)$, 并且满足下述要求:

(i) $\exists k < \min\left\{\mathrm{dom}\left(s_0^n\right), \mathrm{dom}\left(s_1^n\right)\right\}\ \left(s_0^n(k) \neq s_1^n(k)\right)$;

(ii) 令 $\tau_0 = s_{i_0}^0 + s_{i_1}^1 + s_{i_{n-1}}^{n-1} + s_0^n$, 以及 $\tau_1 = s_{i_0}^0 + s_{i_1}^1 + \cdots + s_{i_{n-1}}^{n-1} + s_1^n$, 那么

$$\varnothing \neq (X \cap N_{\tau_0}) \times (X \cap N_{\tau_1}) \subset K.$$

规定谁犯规谁输掉本赛局; 如果张三和李四都不犯规, 在 ω 步之后他们合作产生一个实数:

$$x = \bigcup \left\{ s^0_{i_0} + s^1_{i_1} + \cdots + s^n_{i_n} \mid n < \omega \right\},$$

本赛局的输赢标准为: 张三赢得本赛局当且仅当张三在本赛局过程中没有犯规, 并且 $x \in X$.

这个赛事在比赛过程中, 张三负责给出开集分裂的两项选择; 李四则从中二选一; 他们合作最终是要应用区间套定理来得到唯一的一个实数; 然后再问所得到的实数是否在给定的集合之中.

引理 3.24 设 $X \subseteq 2^\omega$. 设 $K \subseteq [X]^2$ 为一个相对开集. 在由 X 和 K 所确定的赛事 $\mathscr{G}(X, K)$ 中, 张三稳操胜券的充分必要条件是 X 包含一个完备子集.

证明 (必要性) 设 σ 为张三的一个稳赢策略, 那么 σ 诱导出一个连续单射

$$f : 2^\omega \ni y \mapsto \sigma \star y \in X,$$

并且 $f[2^\omega] \subset X$ 是一个开整齐子集.

(充分性) 设 $P \subset X$ 是一个完备子集并且是一个开整齐子集. 令 $T \subset 2^{<\omega}$ 为一棵完备二叉树. 那么张三所需要做的就是沿着这棵树作出应对. 这便是他的稳赢策略. □

引理 3.25 设 $X \subseteq 2^\omega$. 设 $K \subseteq [X]^2$ 为一个相对开集. 在由 X 和 K 所确定的赛事 $\mathscr{G}(X, K)$ 中, 李四稳操胜券的充分必要条件是 X 是可数个闭整齐子集的并.

证明 (充分性) 设 $X = \bigcup\{X_n \mid n < \omega\}$ 是可数个闭整齐子集的并. 我们来为李四设计一个稳赢策略 τ.

假设 $\left(s^0_0, s^0_1\right)$ 是张三的开局. 假设张三没有犯规. 那么或者 $N_{s^0_0} \cap X_0 = \varnothing$, 或者 $N_{s^0_1} \cap X_0 = \varnothing$. 若第一个等式成立, 则选择 $i_0 = 0$; 如果第二个等式成立, 则选择 $i_0 = 1$.

递归地, 假设对于 $m \leqslant n$, i_m 已经有定义. 令

$$s = s^0_{i_0} + s^1_{i_1} + \cdots + s^n_{i_n}.$$

那么, 对于 $m \leqslant n$, 都有 $N_s \cap X_m = \varnothing$. 设 $\left(s^{n+1}_0, s^{n+1}_1\right)$ 是张三的当前应对, 同样假设张三没有犯规. 令 $t_0 = s + s^{n+1}_0$ 以及 $t_1 = s + s^{n+1}_1$, 如果 $N_{t_0} \cap X_{n+1} = \varnothing$, 那么应对 $i_{n+1} = 0$; 否则, $N_{t_1} \cap X_{n+1} = \varnothing$, 此时应对 $i_{n+1} = 1$.

这就完成了李四的策略 τ 的设计. 现在来证明 τ 是李四的一个稳赢策略. 假设张三没有犯规, 李四按照策略 τ 的计算在每一步上应对. 他们合作得到赛局

$$x = \bigcup \left\{ s^0_{i_0} + s^1_{i_1} + \cdots + s^n_{i_n} \mid n < \omega \right\}.$$

我们断言：$x \notin X$. 如果不然, 令 $n = \min\{k \mid x \in X_k\}$, 令 $s = s^0_{i_0} + s^1_{i_1} + \cdots + s^n_{i_n}$. 可是 $s \subset x$ 并且 $N_s \cap X_n = \varnothing$. 这就是一个矛盾.

(必要性) 设 τ 是李四的一个稳赢策略. 我们来利用这个稳赢策略将 X 分解成可数个闭整齐子集的并.

对于 $s \in 2^{<\omega}$, 令

$$B_s = \left\{x \in X \;\middle|\; s \subset x \wedge \forall y \in N_s \cap X\, [\{x, y\}]^2 \cap K = \varnothing\right\}.$$

那么 $[B_s]^2 \cap K = \varnothing$.

令 $X_0 = \bigcup\{B_s \mid s \in 2^{<\omega}\}$, 以及 $A = X - X_0$. 那么

$$\forall x \in A\, \forall n < \omega\, \exists y \in N_{x\restriction_n} \cap X\ (\{x, y\} \in K).$$

断言 A 是可数个闭整齐子集的并.

称 p 是一个**正确位置**当且仅当这是一个张三没有任何犯规的有限长度的赛局序列, 并且李四在其中完全按照稳赢策略 τ 行事, 以及李四完成最后的应对, 即 p 所对应的赛局形态为

张三	(s^0_0, s^0_1)		(s^1_0, s^1_1)		$\cdots$	(s^n_0, s^n_1)	
李四		i_0		i_1	$\cdots$		i_n

到此为止, 张三没有犯规, 并且每一个 i_k 都是依照 τ 计算出来的.

对于一个正确位置 p, 令 $s(p) = s^0_{i_0} + s^1_{i_1} + \cdots + s^n_{i_n}$, 其中, n 是 p 所完成的步数. 为了方便, 约定空序列是一个正确的位置, 并且 $s(\varnothing) = \varnothing$.

称张三在一个正确位置 p **认输**当且仅当张三此时没有可能出示 (s^{n+1}_0, s^{n+1}_1) 而不犯规.

事实一 如果张三在一个正确位置 p 认输, 那么 $N_{s(p)} \cap X$ 是一个闭整齐子集.

假设不然. 令 $x, y \in N_{s(p)} \cap X$ 满足 $\{x, y\} \in K$. K 是相对开集, 必有 $2^{<\omega}$ 中的两个相互冲突的序列 t_0 和 t_1 满足

$$s(p) + t_0 \subset x \wedge s(p) + t_1 \subset y \wedge \left(N_{s(p)+t_0} \cap X\right) \times \left(N_{s(p)+t_1} \cap X\right) \subset K.$$

这样, 张三完全可以用这一个序对 (t_0, t_1) 来应对而不至于犯规. 也就是说, 张三不应当在此认输.

事实二 假设 p 是一个正确位置, 并且 $s(p) \subset x$. 如果没有 (t_0, t_1) 来满足下述要求

$$\left(N_{s(p)+t_0} \cap X\right) \times \left(N_{s(p)+t_1} \cap X\right) \subset K \wedge \left(s(p) + t_0 \subset x \vee s(p) + t_1 \subset x\right),$$

那么 $\forall y \in N_{s(p)} \cap X\ [\{x,y\}]^2 \cap K = \varnothing$.

这也由 K 是相对开集直接得到.

事实三 对于 $x \in 2^\omega$, 假设对于每一个正确位置 p, 如果 $s(p) \subset x$, 那么必有 (t_0, t_1) 来满足

$$\left(N_{s(p)+t_0} \cap X\right) \times \left(N_{s(p)+t_1} \cap X\right) \subset K$$

以及

$$s\left(p, (t_0, t_1), \tau\left(p, (t_0, t_1)\right)\right) \subset x,$$

那么 $x \notin X$.

利用 τ 是一个稳赢策略这个事实, 应用给定的条件, 沿着 x 构造一个正确位置的序列, 从而得到一个没有任何犯规的赛局, 并且 x 就是赛局的产物. 所以, $x \notin X$.

在经过上述分析之后, 我们来证明上面的断言: A 是可数个闭整齐子集的并.

对于一个正确位置 p, 对于 $x \in A$, 定义 $x \in F_p$ 当且仅当 $s(p) \subset x$ 并且对于张三的每一个不犯规的下一个应对 (t_0, t_1) 都有 $s\left(p, (t_0, t_1), \tau\left(p, (t_0, t_1)\right)\right) \not\subset x$.

根据事实三, 我们有 $A = \bigcup \left\{ F_p \mid p \text{是一个正确位置} \right\}$.

事实四 每一个 F_p 都是一个闭整齐子集.

假设不然. 令正确位置 p 为一个反例. 设 $x, y \in F_p$ 满足 $\{x,y\} \in K$. 令 n 满足 $x\restriction_n \neq y\restriction_n$ 并且

$$(N_{x\restriction_n} \cap X) \times (N_{y\restriction_n} \cap X) \subset K.$$

那么, $s(p) \subset x\restriction_n$ 以及 $s(p) \subset y\restriction_n$. 令 (t_0, t_1) 满足

$$s(p) + t_0 = x\restriction_n \wedge s(p) + t_1 = y\restriction_n .$$

这一对 (t_0, t_1) 就可以是张三的下一个不会犯规的应对. 可是这样以来, 或者

$$s\left(p, (t_0, t_1), \tau\left(p, (t_0, t_1)\right)\right) \subset x,$$

或者

$$s\left(p, (t_0, t_1), \tau\left(p, (t_0, t_1)\right)\right) \subset y.$$

这就是一个矛盾.

断言因此得证. 引理于是得证. □

证明 现在我们来证明定理 3.32. 根据引理 3.23, 我们只需证明康托尔空间 $X = 2^\omega$ 具备开区分特性. 考虑赛事 $\mathscr{G}(X, K)$, 其中 $K \subset [2^\omega]^2$ 是一个相对开集. 对于李四来说, 这个赛事是一个开赛事: 即如果李四赢, 那么他一定在有限步内就赢了. 因此, 这个赛事是一个开赛事. 根据 Gale-Stewart 定理 (定理 3.9), 这是张三和李四之间一定有一位有稳赢策略的赛事. 所以, 根据引理 3.24 以及引理 3.25,

$X = 2^\omega$ 具有开区分特性. 从而, $\mathbb{R}$ 和 $\mathcal{N}$ 具有开区分特性. 因此解析集也就有开区分特性. □

看起来定理 3.32 本该在解析集概念出现的时候就被发现, 因为它的证明并不比解析子集的完备集特性的证明更复杂. 之所以等到 1990 年春天才被注意到, 关键就在于开区分这一观念要等到适当的需求出现之后才产生. 从许多应用例子中, Abraham, Rubin, Shelah 三位作者在文献 9 中抽象出来以开区分为基本概念的一种组合性质; Todorceivic 随之在文献 10 中强化了它们的组合性质, 从而提出了如下**开区分公理**(OCA):

定义 3.36 (OCA) 如果 $X \subset \mathbb{R}$ 不可数, $K \subset [X]^2$ 是一个相对开子集, 那么要么 X 有一个不可数的 K-开整齐子集, 要么 X 是可数个闭整齐子集的并.

3.7 非标准实数直线

非标准自然数结构

在这一节里, 我们利用自然数集合上的非平凡超滤子来构造一个类似于自然数结构的非标准自然数结构. 一来为后面的更为复杂的超幂构造做一点铺垫和准备, 二来提醒读者对于我们通常人所共有的 "有限" 观念的注意. 这个例子将会告诉我们, 我们观念中早已存在的有限可能没有被我们所熟悉的自然数完全表示出来, 因为, 有限与否将是一个内外有别的概念, 也就是说, 有一个观察者的立场问题: 站在内部, 它是有限的; 但是如果站在外部, 它可能就是无穷的.

设 U 是 ω 上的一个超滤子, 并且 $U \cap [\omega]^{<\omega} = \varnothing$, 即 U 是非平凡的.

定义 3.37 对于 $f, g \in \mathbb{N}^\omega$, 定义

$$f \equiv_U g \leftrightarrow \{n \in \omega \mid f(n) = g(n)\} \in U.$$

引理 3.26 $\equiv_U$ 是 $\mathbb{N}^\omega$ 上的一个等价关系.

证明 只需证明关系 $\equiv_U$ 是传递的. 设 $f \equiv_U g$ 并且 $g \equiv_U h$. 令

$$X = \{n \in \omega \mid f(n) = g(n)\} \wedge Y = \{n \in \omega \mid g(n) = h(n)\}$$

以及 $Z = \{n \in \omega \mid f(n) = h(n)\}$.

根据定义, $X \in U$ 以及 $Y \in U$. 由于 U 是一个滤子, $X \cap Y \in U$. 因为 $X \cap Y \subseteq Z$, U 是一个滤子, 所以 $Z \in U$. 因此, $f \equiv_U h$. □

9 U. Abraham, M. Rubin, S. Shelah, On the consistency of some partition theorems for continuous coloring, and the structure of $\aleph_1$-dense real order types, Ann. Pure Appl. Logic, 1985, 29: 123-206.

10 S. Todorcevic, Partition problems in topology, Contemp. Math., Vol. 84, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1989.

定义 3.38 对于 $f \in \mathbb{N}^{\omega}$, 令

$$[\![f]\!]_U = \{g \in \mathbb{N}^{\omega} \mid f \equiv_U g\}.$$

令 $\prod_U \mathbb{N} = \mathbb{N}^{\omega}/U = \{[\![f]\!]_U \mid f \in \mathbb{N}^{\omega}\}$. 对于 $f, g \in \mathbb{N}^{\omega}$, 令

$$[\![f]\!]_U \in^* [\![g]\!]_U \leftrightarrow \{n < \omega \mid f(n) \in g(n)\} \in U.$$

引理 3.27 设 $f, g, h, e \in \mathbb{N}^{\omega}$, 并且 $f \equiv_U g$ 以及 $e \equiv_U h$. 那么

$$[\![f]\!]_U \in^* [\![e]\!]_U \leftrightarrow [\![g]\!]_U \in^* [\![h]\!]_U.$$

因此, $\in^*$ 的定义没有歧义.

证明 设 $f \equiv_U g$ 以及 $e \equiv_U h$. 令

$$X = \{k < \omega \mid f(k) = g(k)\} \wedge Y = \{k < \omega \mid e(k) = h(k)\}.$$

令 $Z = \{k < \omega \mid f(k) \in e(k)\}$, 以及 $W = \{k < \omega \mid g(k) \in h(k)\}$.

假设 $[\![f]\!]_U \in^* [\![e]\!]_U$. 那么 $X \in U, Y \in U$ 以及 $Z \in U$. 于是, $X \cap Y \cap Z \in U$. 因为 $X \cap Y \cap Z \subseteq W$, 所以 $W \in U$. 这即表明 $[\![g]\!]_U \in^* [\![h]\!]_U$.

由对称性即得另外的蕴涵关系. □

引理 3.28 $(\prod_U \mathbb{N}, \in^*)$ 是一个线性集合.

证明 (a) $[\![f]\!]_U \notin^* [\![f]\!]_U$. 因为 U 是一个超滤子, 并且

$$\{n \in \omega \mid f(n) \notin f(n)\} = \omega \in U,$$

所以 $\{n \in \omega \mid f(n) \in f(n)\} = \varnothing \notin U$.

(b) 如果 $[\![f]\!]_U \in^* [\![g]\!]_U$ 以及 $[\![g]\!]_U \in^* [\![h]\!]_U$, 那么 $[\![f]\!]_U \in^* [\![h]\!]_U$.

设 $[\![f]\!]_U \in^* [\![g]\!]_U$ 以及 $[\![g]\!]_U \in^* [\![h]\!]_U$, 令 $X = \{n \in \omega \mid f(n) \in g(n)\}$ 以及

$$Y = \{n \in \omega \mid g(n) \in h(n)\} \wedge Z = \{n \in \omega \mid f(n) \in h(n)\}.$$

根据定义, $X \in U$ 以及 $Y \in U$. 由于 U 是一个滤子, $X \cap Y \in U$. 因为 $X \cap Y \subseteq Z$, U 是一个滤子, 所以 $Z \in U$, 因此, $[\![f]\!]_U \in^* [\![h]\!]_U$.

(c) 对于 $f, g \in \mathbb{N}^{\omega}$, 或者 $[\![f]\!]_U = [\![g]\!]_U$, 或者 $[\![f]\!]_U \in^* [\![g]\!]_U$, 或者 $[\![g]\!]_U \in^* [\![f]\!]_U$.

假设 $[\![f]\!]_U \neq [\![g]\!]_U$. 根据定义,

$$X = \{n < \omega \mid f(n) = g(n)\} \notin U.$$

因为 U 是一个超滤子, 所以 $(\omega - X) \in U$, 也就是说,

$$Y = \{n \in \omega \mid f(n) \neq g(n)\} \in U.$$

令 $Y_0 = \{n \in \omega \mid f(n) \in g(n)\}$ 以及 $Y_1 = \{n \in \omega \mid g(n) \in f(n)\}$. 那么 $Y = Y_0 \cup Y_1$, 并且 $Y_0 \cap Y_1 = \varnothing$. 因为 $Y \in U$, U 是一个超滤子, 所以, 或者 $Y_0 \in U$, 或者 $Y_1 \in U$, 二者必具其一. (c) 于是得证. □

对于每一个 $k < \omega$, 令 $c_k : \omega \to \omega$ 为常值 k 函数. 令 $\mathrm{Id} : \omega \to \omega$ 为 ω 上的恒等函数: $\forall k < \omega\ (\mathrm{Id}(k) = k)$.

引理 3.29 设 $n \in \omega$.

(1) 如果 $f \in \mathbb{N}^\omega$, 并且 $[\![f]\!]_U \in^* [\![c_n]\!]_U$, 那么一定存在唯一的一个 $m < n$ 来实现等式 $[\![f]\!]_U = [\![c_m]\!]_U$.

(2) $[\![c_n]\!]_U \in^* [\![\mathrm{Id}]\!]_U$.

证明 设 $n \in \omega$.

(1) 设 $[\![f]\!]_U \in^* [\![c_n]\!]_U$. 根据定义,

$$X = \{k < \omega \mid f(k) \in c_n(k) = n\} \in U.$$

对于 $i < n$, 令 $X_i = \{k \in \omega \mid f(k) = i\}$. 那么 $X = \bigcup_{i<n} X_i$, 并且当 $i < j < n$ 时, $X_i \cap X_j = \varnothing$. 由于 U 是一个超滤子, 必有一个 $m < n$ 来满足 $X_m \in U$, 并且这样的 m 是唯一的.

(2) 令 $X_n = \{k < \omega \mid n < k\}$. 因为 U 非平凡, $(n+1) \notin U$. 从而 $X_n \in U$. 因此,

$$\{k < \omega \mid c_n(k) < \mathrm{Id}(k)\} = X_n \in U.$$ □

定义 3.39 对于 $[\![f]\!]_U, [\![g]\!]_U \in \prod_U \mathbb{N}$, 定义

(1) $[\![f]\!]_U +^* [\![g]\!]_U = [\![f+g]\!]_U$, 其中 $(f+g) : \omega \to \omega$ 由下式确定:

$$\forall k \in \omega\ ((f+g)(k) = f(k) + g(k)).$$

(2) $[\![f]\!]_U \cdot^* [\![g]\!]_U = [\![f \cdot g]\!]_U$, 其中 $(f \cdot g) : \omega \to \omega$ 由下式确定:

$$\forall k \in \omega\ ((f \cdot g)(k) = f(k) \cdot g(k)).$$

引理 3.30 设 $f, g, h, e \in \mathbb{N}^\omega$, 并且 $f \equiv_U g$ 以及 $e \equiv_U h$. 那么

$$[\![f]\!]_U +^* [\![e]\!]_U = [\![g]\!]_U +^* [\![h]\!]_U \ \wedge\ [\![f]\!]_U \cdot^* [\![e]\!]_U = [\![g]\!]_U \cdot^* [\![h]\!]_U.$$

因此, $+^*$ 和 $\cdot^*$ 的定义没有歧义.

证明 我们来证明 $+^*$ 和 $\cdot^*$ 的定义是无歧义的. 设 $f \equiv_U g$ 以及 $e \equiv_U h$. 令

$$X = \{k < \omega \mid f(k) = g(k)\} \ \wedge\ Y = \{k < \omega \mid e(k) = h(k)\}.$$

那么 $X \cap Y \in U$. 对于 $k \in X \cap Y$, 我们都有 $f(k) + e(k) = g(k) + h(k)$ 以及 $f(k) \cdot e(k) = g(k) \cdot h(k)$. 所以

$$\{k < \omega \mid (f+e)(k) = (g+h)(k)\} \in U \wedge \{k < \omega \mid (f \cdot e)(k) = (g \cdot h)(k)\} \in U. \quad \square$$

引理 3.31 设 $f, g, h \in \mathbb{N}^\omega$.

(1) $[\![f]\!]_U +^* [\![g]\!]_U = [\![g]\!]_U +^* [\![f]\!]_U$, $[\![f]\!]_U \cdot^* [\![g]\!]_U = [\![g]\!]_U \cdot^* [\![f]\!]_U$;

(2) $[\![f]\!]_U +^* ([\![g]\!]_U +^* [\![h]\!]_U) = ([\![f]\!]_U +^* [\![g]\!]_U) +^* [\![h]\!]_U$,
$[\![f]\!]_U \cdot^* ([\![g]\!]_U \cdot^* [\![h]\!]_U) = ([\![f]\!]_U \cdot^* [\![g]\!]_U) \cdot^* [\![h]\!]_U$;

(3) $[\![c_0]\!]_U +^* [\![f]\!]_U = [\![f]\!]_U$; $[\![c_1]\!]_U \cdot^* [\![f]\!]_U = [\![f]\!]_U$;

(4) $[\![f]\!]_U \cdot^* ([\![g]\!]_U +^* [\![h]\!]_U) = [\![f]\!]_U \cdot^* [\![g]\!]_U + [\![f]\!]_U \cdot^* [\![h]\!]_U$;

(5) 如果 $[\![g]\!]_U \in^* [\![h]\!]_U$, 那么 $([\![f]\!]_U +^* [\![g]\!]_U) \in^* ([\![f]\!]_U +^* [\![h]\!]_U)$;

(6) 如果 $[\![c_0]\!]_U \in^* [\![f]\!]_U$ 以及 $[\![g]\!]_U \in^* [\![h]\!]_U$, 那么 $([\![f]\!]_U \cdot^* [\![g]\!]_U) \in^* ([\![f]\!]_U \cdot^* [\![h]\!]_U)$.

证明 (练习.) $\square$

对于 $n \in \mathbb{N}$, 令 $n^* = [\![c_n]\!]_U$, 以及 $j(n) = n^*$.

称 $(\prod_U \mathbb{N}, 0^*, 1^*, +^*, \cdot^*, <^*)$ 为 $(\mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot, <)$ 由 U 所确定的**超幂**, 其中

$$[\![f]\!]_U <^* [\![g]\!]_U \leftrightarrow [\![f]\!]_U \in^* [\![g]\!]_U.$$

定理 3.33 $j : \mathbb{N} \ni n \mapsto n^* \in \prod_U \mathbb{N}$ 具备下述特性:

(1) $j(0) = 0^*$; $j(1) = 1^*$;

(2) $j(m+n) = j(m) +^* j(n)$, $j(m \cdot n) = j(m) \cdot^* j(n)$;

(3) $m < n \leftrightarrow j(m) <^* j(n)$;

(4) $\forall n \in \mathbb{N}\ (j(n) <^* [\![\mathrm{Id}]\!]_U)$.

证明 (练习.) $\square$

可见, $\prod_U \mathbb{N}$ 中的元素 $[\![\mathrm{Id}]\!]_U$ 是一个在线性关系 $<^*$ 下比每一个 n^* 都大的 "自然数". 结构 $(\prod_U \mathbb{N}, 0^*, 1^*, +^*, \cdot^*, <^*)$ 被称为自然数理论的一个**非标准模型**; 而结构 $(\mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot, <)$ 则是自然数理论的**标准模型**.

下面我们来揭示超幂 $\prod_U \mathbb{N}$ 上的关系 $\in^*$ 不是有秩关系.

令 $f_0 = \mathrm{Id}$ 以及 $X_0 = \{k < \omega \mid 1 < k\}$. 递归地, 对 $k \in \omega$, 令

$$f_{n+1}(k) = \begin{cases} f_n(k) - 1 & \text{如果 } k \in X_n, \\ 0 & \text{如果 } k \notin X_n. \end{cases}$$

以及 $X_{n+1} = \{k < \omega \mid n+2 < k\}$.

注意, 对于 $n < \omega$, $k \in X_n$, 总有 $n+1 < k$, 从而 $f_n(k) = k - n$. 这样, 对于 $n < \omega$, 总有 $X_n \in U$ 以及 $\forall k \in X_n\ (f_{n+1}(k) \in f_n(k))$, 因此,

$$[\![f_{n+1}]\!]_U \in^* [\![f_n]\!]_U.$$

事实 存在具备如下特点的无穷序列 $\langle f_n \mid n < \rangle$:

$$\forall n < \omega \left([\![f_{n+1}]\!]_U \in^* [\![f_n]\!]_U \right).$$

因此 $(\prod_U \mathbb{N}, \in^*)$ 不是有秩的. 但是当关系 $\in^*$ 限制在下面的子集合时是有秩的:

$$j[\mathbb{N}] = \{ [\![c_n]\!]_U \in \prod_U \mathbb{N} \mid n < \omega \}.$$

事实上, $j : (\mathbb{N}, \in) \cong (j[\mathbb{N}], \in^*)$. 因为 $\in$ 在 $\mathbb{N}$ 上有秩, 所以 $\in^*$ 在 $j[\mathbb{N}]$ 上有秩, $j[\mathbb{N}]$ 也是 $\prod_U \mathbb{N}$ 的一个 $\in^*$-**截断**. $I \subset \prod_U \mathbb{N}$ 是 $\prod_U \mathbb{N}$ 的一个**截断**当且仅当它不空, 并且

$$\forall x \in \prod_U \mathbb{N} \, \forall y \in \prod_U \mathbb{N} \left((y \in I \wedge x \in^* y) \to x \in I \right).$$

称 $W \subset \prod_U \mathbb{N}$ 是 $\prod_U \mathbb{N}$ 的**有秩部分**当且仅当 W 是 $\prod_U \mathbb{N}$ 的一个截断, $\in^*$ 在 W 上的限制是有秩的, 并且 W 是具备有秩性的极大截断. 事实上, $j[\mathbb{N}]$ 就是 $(\prod_U \mathbb{N}, \in^*)$ 的有秩部分. 我们将极大性的验证留给读者. 对于 $x \in \prod_U \mathbb{N}$ 但是 $x \notin j[\mathbb{N}]$, 我们称之为**非标准**自然数; 而称 $n^* \in j[\mathbb{N}]$ 为**标准**自然数. 于是, 所有标准自然数都是有限的, 所有非标准自然数都是无穷的.

非阿基米德直线

在实数轴上, 我们非常熟悉的一个基本性质是阿基米德性质: 无论实数 a 有多大, 无论正实数 ϵ 有多小, 总有一个足够大的自然数 N 来令 ϵ 的 N 倍超过 a. 这在微积分、实分析中, 是经常有用的一个性质. 在这里, 我们来构造一个 "非标准" 的实数轴. 在这个非标准实数轴上, 我们所熟悉的阿基米德性质不再为真. 这里, 我们依旧只是构造出这样一条非标准实数轴, 而不对它展开深入分析. 构造的方法还是超幂构造方法.

设 U 是 ω 上的一个超滤子, 并且 $U \cap [\omega]^{<\omega} = \varnothing$, 即 U 是非平凡的.

定义 3.40 对于 $f, g \in \mathbb{R}^\omega$, 定义

$$f \equiv_U g \leftrightarrow \{n \in \omega \mid f(n) = g(n)\} \in U.$$

引理 3.32 $\equiv_U$ 是 $\mathbb{R}^\omega$ 上的一个等价关系.

证明与引理 3.26 的证明完全相同, 故省略.

定义 3.41 对于 $f \in \mathbb{R}^\omega$, 令

$$[\![f]\!]_U = \{ g \in \mathbb{R}^\omega \mid f \equiv_U g \}.$$

令 $\prod_U \mathbb{R} = \mathbb{R}^\omega / U = \{ [\![f]\!]_U \mid f \in \mathbb{R}^\omega \}$. 对于 $f, g \in \mathbb{R}^\omega$, 令

$$[\![f]\!]_U <^* [\![g]\!]_U \leftrightarrow \{n < \omega \mid f(n) < g(n)\} \in U.$$

引理 3.33　设 $f, g, h, e \in \mathbb{R}^\omega$, 并且 $f \equiv_U g$ 以及 $e \equiv_U h$. 那么

$$[\![f]\!]_U <^* [\![e]\!]_U \leftrightarrow [\![g]\!]_U <^* [\![h]\!]_U.$$

因此, $<^*$ 的定义没有歧义.

证明　设 $f \equiv_U g$ 以及 $e \equiv_U h$. 令

$$X = \{k < \omega \mid f(k) = g(k)\} \wedge Y = \{k < \omega \mid e(k) = h(k)\}.$$

令 $Z = \{k < \omega \mid f(k) < e(k)\}$, 以及 $W = \{k < \omega \mid g(k) < h(k)\}$.

假设 $[\![f]\!]_U <^* [\![e]\!]_U$. 那么 $X \in U$, $Y \in U$ 以及 $Z \in U$, 于是, $X \cap Y \cap Z \in U$. 因为 $X \cap Y \cap Z \subseteq W$, 所以 $W \in U$. 这即表明 $[\![g]\!]_U <^* [\![h]\!]_U$.

由对称性即得另外的蕴涵关系. □

引理 3.34　$(\prod_U \mathbb{R}, <^*)$ 是一个线性集合.

证明　(a) $[\![f]\!]_U \not<^* [\![f]\!]_U$. 因为 U 是一个超滤子, 并且

$$\{n \in \omega \mid f(n) \not< f(n)\} = \omega \in U,$$

所以 $\{n \in \omega \mid f(n) < f(n)\} = \varnothing \notin U$.

(b) 如果 $[\![f]\!]_U <^* [\![g]\!]_U$ 以及 $[\![g]\!]_U <^* [\![h]\!]_U$, 那么 $[\![f]\!]_U <^* [\![h]\!]_U$.

设 $[\![f]\!]_U <^* [\![g]\!]_U$ 以及 $[\![g]\!]_U <^* [\![h]\!]_U$, 令 $X = \{n \in \omega \mid f(n) < g(n)\}$ 以及

$$Y = \{n \in \omega \mid g(n) < h(n)\} \wedge Z = \{n \in \omega \mid f(n) < h(n)\}.$$

根据定义, $X \in U$ 以及 $Y \in U$. 由于 U 是一个滤子, $X \cap Y \in U$. 因为 $X \cap Y \subseteq Z$, U 是一个滤子, 所以 $Z \in U$. 因此, $[\![f]\!]_U <^* [\![h]\!]_U$.

(c) 对于 $f, g \in \mathbb{R}^\omega$, 或者 $[\![f]\!]_U = [\![g]\!]_U$, 或者 $[\![f]\!]_U <^* [\![g]\!]_U$, 或者 $[\![g]\!]_U <^* [\![g]\!]_U$.

假设 $[\![f]\!]_U \neq [\![g]\!]_U$. 根据定义,

$$X = \{n < \omega \mid f(n) = g(n)\} \notin U.$$

因为 U 是一个超滤子, 所以, $(\omega - X) \in U$. 也就是说,

$$Y = \{n \in \omega \mid f(n) \neq g(n)\} \in U.$$

令 $Y_0 = \{n \in \omega \mid f(n) < g(n)\}$ 以及 $Y_1 = \{n \in \omega \mid g(n) < f(n)\}$. 那么 $Y = Y_0 \cup Y_1$, 并且 $Y_0 \cap Y_1 = \varnothing$. 因为 $Y \in U$, U 是一个超滤子, 所以, 或者 $Y_0 \in U$, 或者 $Y_1 \in U$, 二者必具其一, (c) 于是得证. □

定义 3.42 对于 $[\![f]\!]_U, [\![g]\!]_U \in \prod_U \mathbb{R}$, 定义

(1) $[\![f]\!]_U +^* [\![g]\!]_U = [\![f+g]\!]_U$, 其中 $(f+g):\omega \to \mathbb{R}$ 由下式确定:

$$\forall k \in \omega\ ((f+g)(k) = f(k) + g(k)).$$

(2) $[\![f]\!]_U \cdot^* [\![g]\!]_U = [\![f \cdot g]\!]_U$, 其中 $(f \cdot g):\omega \to \mathbb{R}$ 由下式确定:

$$\forall k \in \omega\ ((f \cdot g)(k) = f(k) \cdot g(k)).$$

引理 3.35 设 $f, g, h, e \in \mathbb{R}^\omega$, 并且 $f \equiv_U g$ 以及 $e \equiv_U h$. 那么

$$[\![f]\!]_U +^* [\![e]\!]_U = [\![g]\!]_U +^* [\![h]\!]_U \wedge [\![f]\!]_U \cdot^* [\![e]\!]_U = [\![g]\!]_U \cdot^* [\![h]\!]_U.$$

因此, $+^*$ 和 $\cdot^*$ 的定义没有歧义.

证明引理 3.30 的证明完全相同. 故省略.

对于每一个 $x \in \mathbb{R}$, 令 $c_x : \omega \to \mathbb{R}$ 为常值 x 函数. 对于 $x \in \mathbb{R}$, 令 $x^* = [\![c_x]\!]_U$, 以及 $j(x) = x^*$.

称 $(\prod_U \mathbb{R}, 0^*, 1^*, +^*, \cdot^*, <^*)$ 为 $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, <)$ 由 U 所确定的**超幂**.

引理 3.36 设 $f, g, h \in \mathbb{R}^\omega$.

(1) $[\![f]\!]_U +^* [\![g]\!]_U = [\![g]\!]_U +^* [\![f]\!]_U$; $[\![f]\!]_U \cdot^* [\![g]\!]_U = [\![g]\!]_U \cdot^* [\![f]\!]_U$;

(2) $[\![f]\!]_U +^* ([\![g]\!]_U +^* [\![h]\!]_U) = ([\![f]\!]_U +^* [\![g]\!]_U) +^* [\![h]\!]_U$,
$[\![f]\!]_U \cdot^* ([\![g]\!]_U \cdot^* [\![h]\!]_U) = ([\![f]\!]_U \cdot^* [\![g]\!]_U) \cdot^* [\![h]\!]_U$;

(3) $[\![c_0]\!]_U +^* [\![f]\!]_U = [\![f]\!]_U$, $[\![c_1]\!]_U \cdot^* [\![f]\!]_U = [\![f]\!]_U$;

(4) $[\![f]\!]_U \cdot^* ([\![g]\!]_U +^* [\![h]\!]_U) = [\![f]\!]_U \cdot^* [\![g]\!]_U + [\![f]\!]_U \cdot^* [\![h]\!]_U$;

(5) 如果 $[\![g]\!]_U <^* [\![h]\!]_U$, 那么 $([\![f]\!]_U +^* [\![g]\!]_U) <^* ([\![f]\!]_U +^* [\![h]\!]_U)$;

(6) 如果 $[\![c_0]\!]_U <^* [\![f]\!]_U$ 以及 $[\![g]\!]_U <^* [\![h]\!]_U$, 那么 $([\![f]\!]_U \cdot^* [\![g]\!]_U) <^* ([\![f]\!]_U \cdot^* [\![h]\!]_U)$.

证明 (练习.) □

定理 3.34 $j : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^* \in \prod_U \mathbb{R}$ 具备下述特性:

(1) $j(0) = 0^*$; $j(1) = 1^*$;

(2) $j(x+y) = j(x) +^* j(y)$, $j(x \cdot y) = j(x) \cdot^* j(y)$;

(3) $x < y \leftrightarrow j(x) <^* j(y)$;

(4) $\forall x \in \mathbb{R}\ (j(x) <^* [\![\mathrm{Id}]\!]_U)$, 其中 Id 是 ω 上的恒等函数;

(5) 如果 $\epsilon \in \mathbb{R}$ 是一个正实数, 那么

$$0^* <^* \frac{1^*}{[\![\mathrm{Id}]\!]_U} < \epsilon^*.$$

证明 (练习.) □

可见, $\prod_U \mathbb{R}$ 中的元素 $[\![\mathrm{Id}]\!]_U$ 是一个在线性关系 $<^*$ 下比每一标准实数都大的"实数"; 而它的倒数 $\dfrac{1^*}{[\![\mathrm{Id}]\!]_U}$ 则是一个在线性序 $<^*$ 之下大于 0^* 又小于任何标准正实数 ϵ^* 的一个 "**正无穷小量**". 结构 ${}^*\mathbb{R} = (\prod_U \mathbb{R}, 0^*, 1^*, +^*, \cdot^*, <^*)$ 被称为实数理论的一个**非标准模型**; 而结构 $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, <)$ 则是实数理论的**标准模型**.

3.8 苏斯林直线

现在来讨论苏斯林问题 (问题 3.1). 我们将会看到这样一个非常自然的问题是集合论公理系统 ZFC 所不能够解答的问题.

我们将苏斯林问题的反例与规范苏斯林树联系起来: 给定一个苏斯林问题的反例 $(S,<)$, 将利用 $(S,<)$ 的开区间来构造一棵规范苏斯林树; 再利用一棵规范苏斯林树, 构造一个苏斯林问题的反例.

定义 3.43 设 $(X,\leqslant)$ 是一条直线 (一个线性有序集合), $(T,\preceq)$ 是一棵树. 树 $(T,\preceq)$ 在 $(X,<)$ 上的一种**区间表示** 是一个定义在 T 上的满足如下要求的单射 Φ:

(a) $\forall x \in T\ (\Phi(x) \subseteq X$ 是 $(X,\leqslant)$ 的一个区间$)$.

(b) 对于任意的 $x, y \in T$,

(i) 如果 $x \preceq y$, 那么 $\Phi(x) \supseteq \Phi(y)$;

(ii) 如果 x 与 y 在 $\preceq$ 下不可比较, 那么 $\Phi(x) \cap \Phi(y) = \varnothing$.

命题 3.11 如果 Φ 是树 $(T,\preceq)$ 在直线 $(X,\leqslant)$ 上的一个区间表示, 那么 $(\Phi[T], \supseteq)$ 是一棵与 $(T,\preceq)$ 同构的树.

例 3.10 在例子 3.4 中, 我们定义了一个从树 $(T,\leqslant)$ 到线段 $([0,1],<)$ 的非平凡闭子区间之集 $\mathscr{F}$ 的单射 $s \mapsto P_s$. 若令 $\Phi(x) = P_s$, 则 Φ 就是树 $(\mathrm{Seq}(\{0,1\}),<)$ 在直线 $([0,1],<)$ 上的一个区间表示.

定义 3.44 (苏斯林直线) 一个线性有序集合 $(S,<)$ 被称为一条**苏斯林直线**当且仅当① 它是无端点稠密线性有序集; ② 它是序完备的; ③ 它上面的任何一个彼此互不相交的开区间的集合之势必然可数; 以及④ 它不包含任何可数稠密子集.

于是, 上述苏斯林问题有一个否定答案当且仅当存在一条苏斯林直线.

定理 3.35 存在一条苏斯林直线当且仅当存在一棵规范苏斯林树.

证明 (必要性) 设 $(S,<)$ 是一条苏斯林直线, 我们来构造树 $(\omega^{<\omega_1},<)$ 的一棵子树.

令 $\mathscr{D} = \{(a,b) \subseteq S \mid -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty\}$.

对于 $\alpha < \omega_1$, 我们递归地定义 $T_\alpha \subset \omega^\alpha$ 以及 $\Phi_\alpha : T_\alpha \to \mathscr{D}$ 以至于下述要求被满足:

(1) $|T_\alpha| \leqslant \aleph_0$.

(2) $T\restriction_{(\alpha+1)}=\bigcup\limits_{\beta\leqslant\alpha}T_\beta$ 是一棵树.

(3) $\Phi\restriction_{(\alpha+1)}=\bigcup\limits_{\beta\leqslant\alpha}\Phi_\beta$ 是树 $(T\restriction_{(\alpha+1)},<)$ 在 $(S,<)$ 上的一个区间表示.

(I) $T_0=\{\varnothing\}$, $\Phi_0(\varnothing)=S$.

(II) 假设 (T_α,Φ_α) 已经被定义好, 而且满足所有的要求. 对于 $f\in T_\alpha$, 令 $(a,b)=\Phi_\alpha(f)$. 在区间 (a,b) 中取一个长度为 ω 的单调递增的序列

$$a=a_1<a_2<\cdots<a_k<a_{k+1}<\cdots<b,$$

并且令 $a_0=\sup(\{a_{k+1}\mid k\in\omega\})$.

情形一 $a_0=b$.

此时, 对于 $k\in\omega$, 令

$$f_{k+1}=f\cup\{(\alpha,k+1)\};\ \Phi_{\alpha+1}(f_{k+1})=(a_{k+1},a_{k+2})$$

以及令 $A(f)=\{f_{k+1}\mid k\in\omega\}$;

情形二 $a_0<b$.

此时, 对于 $k\in\omega$, 令

$$f_{k+1}=f\cup\{(\alpha,k+1)\};\ \Phi_{\alpha+1}(f_{k+1})=(a_{k+1},a_{k+2});$$

且

$$f_0=f\cup\{(\alpha,0)\};\ \Phi_{\alpha+1}(f_0)=(a_0,b)$$

以及令 $A(f)=\{f_k\mid k\in\omega\}$.

再令 $T_{\alpha+1}=\bigcup\{A(f)\mid f\in T_\alpha\}$, 那么, $(T_{\alpha+1},\Phi_{\alpha+1})$ 合乎要求.

(III) 设 $\alpha<\omega_1$ 是一个非零极限序数, 并且 $\langle(T_\beta,\Phi_\beta)\mid\beta<\alpha\rangle$ 已经被定义好, 且所有的要求都得到满足. 令

$$T\restriction_\alpha=\bigcup_{\beta<\alpha}T_\beta;\ B_\alpha=[T\restriction_\alpha]=\{b\in\omega^\alpha\mid b\text{ 是 }T\restriction_\alpha\text{ 的一根树枝}\};\ \Phi\restriction_\alpha=\bigcup_{\beta<\alpha}\Phi_\beta.$$

固定 $f\in B_\alpha$, 对于 $\beta<\alpha$, 令 $(a_\beta,b_\beta)=\Phi\restriction_\alpha(f\restriction_\beta)$. 如果 $\beta<\gamma<\alpha$, 那么 $a_\beta\leqslant a_\gamma<b_\gamma\leqslant a_\beta$. 令

$$a_f=\sup(\{a_\beta\mid\beta<\alpha\});\ b_f=\inf(\{b_\beta\mid\beta<\alpha\}).$$

那么 $a_f\leqslant b_f$. 令

$$T_\alpha=\{f\in B_\alpha\mid a_f<b_f\};\ \forall f\in T_\alpha\ (\Phi_\alpha(f)=(a_f,b_f)).$$

如果 $T_\alpha = \varnothing$, 则终止在 α 步, 得到 $T = T\restriction_\alpha$; 否则, 令

$$T\restriction_{(\alpha+1)} = T\restriction_\alpha \cup T_\alpha$$

以及 $\Phi_{\alpha+1} = \Phi\restriction_\alpha \cup \Phi_\alpha$. 唯一需要验证的是 T_α 是一个可数集合. 这由直线 $(S,<)$ 的弱可分性所保证：它上面任何彼此互不相交的开区间的个数最多 $\aleph_0$ 个, 而

$$\{(a_f, b_f) \mid f \in T_\alpha\}$$

是彼此不相交的开区间的集合, 并且如果 f, g 是 T_α 中不同的元素, 那么

$$(a_f, b_f) \cap (a_g, b_g) = \varnothing.$$

所以, $(T\restriction_{(\alpha+1)}, \Phi\restriction_{(\alpha+1)})$ 满足所有的要求.

这就完成了递归构造. 令 $T = \bigcup \alpha < \omega_1 T_\alpha$ 以及 $\Phi = \bigcup \alpha < \omega_1 \Phi_\alpha$. 那么,

$$(T, <)$$

是一棵树, Φ 是此树在直线 $(S,<)$ 上的一个区间表示.

我们来验证树 $(T,<)$ 是一棵规范苏斯林树.

第一, 它没有不可数个彼此不可比较的节点 (无不可数反链), 因为任何反链在 Φ 下的像集都是彼此不相交的开区间集, 所以一定可数.

第二, 它没有长度为 ω_1 的树枝. 因为 $(T,<)$ 是一棵每一个节点都有无穷可数个直接后继, 沿任何一根长度为 ω_1 的树枝 b 都能够定义出一条由不可数个彼此不可比较的节点组成的反链. 这会与上面论证的结论不符.

第三, $(T,<)$ 的高度为 ω_1. 我们需要验证的是当 $\alpha < \omega_1$ 为非零极限序数时, T_α 一定非空[11].

假设不然. 令 $\bar{\alpha} < \omega_1$ 为最小的满足等式 $T_\alpha = \varnothing$ 的极限序数. 令

$$C = \{a, b \mid \exists f \in T\restriction_{\bar{\alpha}} \ (a,b) = \Phi(f)\}.$$

那么, $|C| \leqslant \aleph_0$. 因而, C 不可能在 S 中稠密. 令 S 中的非平凡开区间 (c,d) 满足等式 $(c,d) \cap C = \varnothing$. 我们利用 (c,d) 来构造 $T\restriction_{\bar{\alpha}}$ 的一根等高树枝.

首先, 令 $B(0) = \varnothing$, 我们有 $(c,d) \subset \Phi(B(0))$. 给定 $B(\gamma) \in T_\gamma$ 满足

$$(c,d) \subset \Phi(B(\gamma)) = (a,b),$$

11 树 $(T,<)$ 的构造过程相对于实数轴 $(\mathbb{R},<)$ 依然是有效的, 只不过是应用实数轴 $(\mathbb{R},<)$ 所实施的构造必然在某个可数极限基数步终止, 即 $T_\alpha = \varnothing$.

令 $a_1 = a < a_2 < \cdots < a_k < a_{k+1} < \cdots < a_0 \leqslant b$ 为在构造 $\Phi_{\gamma+1}$ 的过程中所使用的序列. 由于

$$(c,d) \cap C = \varnothing,$$

必有唯一的 $n \in \omega$ 满足下述要求：

$$(n > 0 \wedge (c,d) \subset (a_n, a_{n+1})) \vee (n = 0 \wedge (c,d) \subset (a_0, b)).$$

令 $B(\gamma+1) = B(\gamma) \cup \{(\gamma, n)\}$.

对于极限序数 $\gamma < \bar{\alpha}$, 根据归纳假设, $(c,d) \subset \bigcap_{\beta<\gamma} \Phi(B(\beta))$, 于是,

$$g = \left(\bigcup_{\beta<\gamma} B(\beta)\right) \in T_\gamma \wedge \Phi(g) \supset (c,d).$$

此时, 令 $B(\gamma) = g$.

令 $f = \bigcup_{\gamma<\bar{\alpha}} B(\gamma)$. 那么

$$(c,d) \subset \bigcap_{\gamma<\bar{\alpha}} \Phi(B(\gamma)).$$

根据在极限序数 $\bar{\alpha}$ 步的构造, $f \in T_{\bar{\alpha}}$, 这与 $T_{\bar{\alpha}} = \varnothing$ 之假设矛盾.

第四, 依据递归定义, 立即得到 $(T,<)$ 是规范的.

(充分性) 设 $(T,\preceq)$ 为一棵规范苏斯林树. 根据规范性, 不妨假设 $T \subset A^{<\omega_1}$ 以及 $\preceq$ 就是 $\subseteq$.

对于 $f \in T$, 令 $S_f = \{g \in T \mid g \text{ 是 } f \text{ 的直接后继}\}$, 它是一个无穷可数集合; 应用一个从 S_f 到有理数集合 $\mathbb{Q}$ 的双射在 S_f 上定义一个无端点稠密线性序 $\prec_f$.

由于 T 是一棵苏斯林树, 它的任何一根树枝的长度都是一个可数极限序数. 令 B 为 $(T,\subset)$ 的所有树枝的集合.

如果 b_1, b_2 是 B 中的两个元素, 那么它们一定彼此不可比较; 令 α 为它们的最小区分节点的层次, 即

$$b_1 \restriction_\alpha = b_2 \restriction_\alpha \wedge b_1(\alpha) \neq b_2(\alpha),$$

我们定义

$$b_1 < b_2 \leftrightarrow b_1 \restriction_{(\alpha+1)} \prec_{b_1\restriction_\alpha} b_2 \restriction_{(\alpha+1)}.$$

这样, $(B,<)$ 是一个无端点稠密线性有序集合.

断言一 $(B,<)$ 上没有不可数个彼此互不相交的开区间.

假设不然. 设 $\{(b_\alpha, b'_\alpha) \mid \alpha < \omega_1\}$ 为不可数个彼此互不相交的开区间. 对于每一个 α, 令 γ_α 为满足等式 $b_\alpha(\gamma) \neq b'_\alpha(\gamma)$ 的最小序数. 令 $g_\alpha \in S_{b_\alpha\restriction_{\gamma_\alpha}}$ 满足

$$b_\alpha \restriction_{(\gamma_\alpha+1)} \prec g \prec b'_\alpha \restriction_{(\gamma_\alpha+1)},$$

其中, $\prec = \prec_{b_\alpha\restriction_{\gamma_\alpha}}$. 那么

$$\{g_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$$

是 $(T, \subset)$ 的一条不可数的反链. 这就是一个矛盾.

断言二 $(B, <)$ 没有可数稠密子集.

假设不然. 令 $C = \{b_n \mid n \in \omega\}$ 为 $(B, <)$ 中的一个稠密子集. 令

$$\alpha = \sup(\{\ell(b_n) \mid n < \omega\}).$$

那么, $\alpha < \omega_1$.

由于 $T_\alpha \neq \varnothing$, 令 $f \in T_\alpha$; $f_1, f_2 \in S_f$; $f_1 \prec_f f_2$. 任取两根分别扩展 f_1 和 f_2 的树枝 $d_1 \supset f_1$ 以及 $d_2 \supset f_2$. 那么, $d_1 < d_2$, 并且 $(d_1, d_2) \cap C = \varnothing$.

称 (X, Y) 为 $(B, <)$ 的一个**分割** 当且仅当

(i) $B = X \cup Y$;

(ii) $X \neq \varnothing \neq Y$;

(iii) $\forall a \in X\, \forall b \in Y\, (a < b)$;

(iv) X 没有最大元.

令 $S = \{(X, Y) \mid (X, Y)$ 是 $(B, <)$ 的一个分割$\}$; 对于 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2) \in S$, 令

$$(X_1, Y_1) \preceq (X_2, Y_2) \leftrightarrow X_1 \subseteq X_2.$$

对于 $a \in B$, 令 $X_a = \{b \in B \mid b < a\}$ 以及 $Y_a = \{b \in B \mid a \leqslant b\}$, 令

$$B^* = \{(X_a, Y_a) \mid a \in B\}.$$

那么, $(B^*, \preceq)$ 是 $(S, \preceq)$ 的与 $(B, <)$ 同构的稠密子集; $(S, \preceq)$ 是一个完备线性有序集合; $(S, <)$ 是一条苏斯林直线. □

推论 3.8 (1) 如果钻石原理成立, 那么存在一条苏斯林直线.

(2) 如果马丁公理 $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ 成立, 那么不存在苏斯林直线.

3.9 练　　习

练习 3.1 (1) $\varnothing$ 和 $\mathbb{R}$ 都既是开集又是闭集.

(2) 若 F 是一个有限的非空集合, 而且 F 中的每一个元素都是一个开集, 那么 $\bigcap F$ 是一个开集.

(3) 若 F 是一个由一些开集所组成的集合, 那么 $\bigcup F$ 是一个开集.

备注: 上述三条组成一个集合 X 上的拓扑 σ 的定义公理: $\sigma \subset \mathfrak{P}X$ 是 X 上的一个**拓扑** (其中的元素被称为 X 的 **开集**) 当且仅当

(a) $\varnothing \in \sigma$, $X \in \sigma$;

(b) σ 对于有限交是封闭的;

(c) σ 对于任意子集合的并是封闭的.

(4) 若 F 是一个有限集合, 而且 F 中的每一个元素都是一个闭集, 那么 $\bigcup F$ 是一个闭集.

(5) 若 F 是一个由一些闭集所组成的非空集合, 那么 $\bigcap F$ 是一个闭集.

练习 3.2　设 X 是一个集合. 设 $\mathscr{A}_1 \subseteq \mathfrak{P}(X)$ 和 $\mathscr{A}_2 \subseteq \mathfrak{P}(X)$ 是 X 上的两个 σ-代数. 那么 $\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2$ 也是 X 上的一个 σ-代数. 事实上, X 上的任意多个 σ-代数之交依旧还是一个 σ-代数. 也就是说, 任何集合上都存在在关系 $\supseteq$ 之下的最小 σ-代数.

练习 3.3　假设选择公理. 那么实数轴上存在维塔利集合, 并且如果 A 是一个维塔利集合, 那么 A 不具备贝尔性质.

练习 3.4　假设选择公理. 如果 A 是一个维塔利集合, 那么 A 是勒贝格不可测的.

练习 3.5　验证: 贝尔空间与实数轴上的全体无理数所成的拓扑子空间同胚, 即在它们之间存在连续双射.

(提示: 考虑无理数的连分数展开.)

练习 3.6　如果 A 与 $(\mathbb{R} - A)$ 都不包含非空完备子集, 那么 A 不具备贝尔性质.

练习 3.7　假设 $|\mathbb{R}| = \aleph_1$, 证明: 存在满足下述等式的可数个函数

$$f_n : [0,1] \to [0,1]$$

$(n < \omega)$:

$$[0,1] \times [0,1] = \left(\bigcup_{n\in\omega} f_n\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\omega} f_n^{-1}\right).$$

(提示: 对 $\omega_1 \times \omega_1$ 实现那样的分解.)

练习 3.8　$a \in A - A' \iff a$ 是 A 的一个孤立点.

练习 3.9　设 A 非空. 那么, A 是一个完备集当且仅当 $A = A'$.

练习 3.10　若 F 是一个闭集, 那么 $F - F'$ 至多可数.

练习 3.11　设 A 为一个闭集.

(1) 证明: 必然有一个可数序数 $\alpha < \omega_1$ 为上述过程的不动点, 也就是说, 下列方程有一个可数序数解:

$$A^{(\alpha+1)} = A^{(\alpha)}.$$

(2) 令 α 为上述过程的最小不动点. 证明: $A^* = A^{(\alpha)}$, 而且它或者为一个空集, 或者是一个完备集.

练习 3.12 证明如下命题:

(1) 令 $\mathcal{O}$ 为全体开实数子集所成的集合. 又令 $\mathcal{C}$ 为全体闭实数子集所成的集合. 那么, 它们同整个实数集合等势.

(2) 令 $\mathcal{P}$ 为全体 (非空) 完备实数子集所成的集合. 那么, 它与整个实数集合等势.

练习 3.13 令 $A = \mathrm{V}_\omega^\omega = \{f \subset \mathrm{V}_\omega \mid f : \omega \to \mathrm{V}_\omega\}$. 设 U 是 ω 上的一个非平凡的超滤子.

(1) 对于 $f, g \in A$, 令

$$f \equiv_U g \leftrightarrow \{k < \omega \mid f(k) = g(k)\} \in U.$$

证明: $\equiv_U$ 是 A 上的一个等价关系.

(2) 对于 $f \in A$, 令 $[\![f]\!]_U = \{g \in A \mid f \equiv_U g\}$. 对于 $f, g \in A$, 令

$$[\![f]\!]_U \in^* [\![g]\!]_U \leftrightarrow \{k < \omega \mid f(k) \in g(k)\} \in U.$$

证明: $\in^*$ 在商空间 $A/\equiv_U = \{[\![f]\!]_U \mid f \in A\}$ 上的定义是无歧义的.

(3) 对于 $a \in V_\omega$, 令 $c_a : \omega \ni k \mapsto a \in V_\omega$ 为常值 a 函数. 令

$$j : V_\omega \ni a \mapsto [\![c_a]\!]_U \in A/\equiv_U .$$

证明: $\forall a \in V_\omega \, \forall b \in V_\omega \; (a \in b \leftrightarrow j(a) \in^* j(b))$.

(4) 证明: 如果 $a \in V_\omega$, $[\![f]\!]_U \in^* j(a)$, 那么 $\exists b \in a \; ([\![f]\!]_U = j(b))$, 并且这样的 b 是唯一的.

(5) 证明: 如果 $W \subset A/\equiv_U$ 是 $(A/\equiv_U, \in^*)$ 的有秩部分 (给出合适定义), 那么 $j[V_\omega] \subset W$.

索　引

其 他

《现代数学基础丛书》已出版书目

(按出版时间排序)

1　数理逻辑基础(上册)　1981.1　胡世华　陆钟万　著
2　紧黎曼曲面引论　1981.3　伍鸿熙　吕以辇　陈志华　著
3　组合论(上册)　1981.10　柯　召　魏万迪　著
4　数理统计引论　1981.11　陈希孺　著
5　多元统计分析引论　1982.6　张尧庭　方开泰　著
6　概率论基础　1982.8　严士健　王隽骧　刘秀芳　著
7　数理逻辑基础(下册)　1982. 8　胡世华　陆钟万　著
8　有限群构造(上册)　1982.11　张远达　著
9　有限群构造(下册)　1982.12　张远达　著
10　环与代数　1983.3　刘绍学　著
11　测度论基础　1983.9　朱成熹　著
12　分析概率论　1984.4　胡迪鹤　著
13　巴拿赫空间引论　1984.8　定光桂　著
14　微分方程定性理论　1985.5　张芷芬　丁同仁　黄文灶　董镇喜　著
15　傅里叶积分算子理论及其应用　1985.9　仇庆久等　编
16　辛几何引论　1986.3　J.柯歇尔　邹异明　著
17　概率论基础和随机过程　1986.6　王寿仁　著
18　算子代数　1986.6　李炳仁　著
19　线性偏微分算子引论(上册)　1986.8　齐民友　著
20　实用微分几何引论　1986.11　苏步青等　著
21　微分动力系统原理　1987.2　张筑生　著
22　线性代数群表示导论(上册)　1987.2　曹锡华等　著
23　模型论基础　1987.8　王世强　著
24　递归论　1987.11　莫绍揆　著
25　有限群导引(上册)　1987.12　徐明曜　著
26　组合论(下册)　1987.12　柯　召　魏万迪　著
27　拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用　1988.1　李　忠　著
28　代数体函数与常微分方程　1988.2　何育赞　著
29　同调代数　1988.2　周伯壎　著

30　近代调和分析方法及其应用　1988.6　韩永生　著
31　带有时滞的动力系统的稳定性　1989.10　秦元勋等　编著
32　代数拓扑与示性类　1989.11　马德森著　吴英青　段海鲍译
33　非线性发展方程　1989.12　李大潜　陈韵梅　著
34　反应扩散方程引论　1990.2　叶其孝等　著
35　仿微分算子引论　1990.2　陈恕行等　编
36　公理集合论导引　1991.1　张锦文　著
37　解析数论基础　1991.2　潘承洞等　著
38　拓扑群引论　1991.3　黎景辉　冯绪宁　著
39　二阶椭圆型方程与椭圆型方程组　1991.4　陈亚浙　吴兰成　著
40　黎曼曲面　1991.4　吕以辇　张学莲　著
41　线性偏微分算子引论(下册)　1992.1　齐民友　许超江　编著
42　复变函数逼近论　1992.3　沈燮昌　著
43　Banach 代数　1992.11　李炳仁　著
44　随机点过程及其应用　1992.12　邓永录等　著
45　丢番图逼近引论　1993.4　朱尧辰等　著
46　线性微分方程的非线性扰动　1994.2　徐登洲　马如云　著
47　广义哈密顿系统理论及其应用　1994.12　李继彬　赵晓华　刘正荣　著
48　线性整数规划的数学基础　1995.2　马仲蕃　著
49　单复变函数论中的几个论题　1995.8　庄圻泰　著
50　复解析动力系统　1995.10　吕以辇　著
51　组合矩阵论　1996.3　柳柏濂　著
52　Banach 空间中的非线性逼近理论　1997.5　徐士英　李　冲　杨文善　著
53　有限典型群子空间轨道生成的格　1997.6　万哲先　霍元极　著
54　实分析导论　1998.2　丁传松等　著
55　对称性分岔理论基础　1998.3　唐　云　著
56　Gel'fond-Baker 方法在丢番图方程中的应用　1998.10　乐茂华　著
57　半群的 S-系理论　1999.2　刘仲奎　著
58　有限群导引(下册)　1999.5　徐明曜等　著
59　随机模型的密度演化方法　1999.6　史定华　著
60　非线性偏微分复方程　1999.6　闻国椿　著
61　复合算子理论　1999.8　徐宪民　著
62　离散鞅及其应用　1999.9　史及民　编著
63　调和分析及其在偏微分方程中的应用　1999.10　苗长兴　著

64 惯性流形与近似惯性流形 2000.1 戴正德 郭柏灵 著
65 数学规划导论 2000.6 徐增堃 著
66 拓扑空间中的反例 2000.6 汪 林 杨富春 编著
67 拓扑空间论 2000.7 高国士 著
68 非经典数理逻辑与近似推理 2000.9 王国俊 著
69 序半群引论 2001.1 谢祥云 著
70 动力系统的定性与分支理论 2001.2 罗定军 张 祥 董梅芳 编著
71 随机分析学基础(第二版) 2001.3 黄志远 著
72 非线性动力系统分析引论 2001.9 盛昭瀚 马军海 著
73 高斯过程的样本轨道性质 2001.11 林正炎 陆传荣 张立新 著
74 数组合地图论 2001.11 刘彦佩 著
75 光滑映射的奇点理论 2002.1 李养成 著
76 动力系统的周期解与分支理论 2002.4 韩茂安 著
77 神经动力学模型方法和应用 2002.4 阮炯 顾凡及 蔡志杰 编著
78 同调论——代数拓扑之一 2002.7 沈信耀 著
79 金兹堡-朗道方程 2002.8 郭柏灵等 著
80 排队论基础 2002.10 孙荣恒 李建平 著
81 算子代数上线性映射引论 2002.12 侯晋川 崔建莲 著
82 微分方法中的变分方法 2003.2 陆文端 著
83 周期小波及其应用 2003.3 彭思龙 李登峰 谌秋辉 著
84 集值分析 2003.8 李 雷 吴从炘 著
85 数理逻辑引论与归结原理 2003.8 王国俊 著
86 强偏差定理与分析方法 2003.8 刘 文 著
87 椭圆与抛物型方程引论 2003.9 伍卓群 尹景学 王春朋 著
88 有限典型群子空间轨道生成的格(第二版) 2003.10 万哲先 霍元极 著
89 调和分析及其在偏微分方程中的应用(第二版) 2004.3 苗长兴 著
90 稳定性和单纯性理论 2004.6 史念东 著
91 发展方程数值计算方法 2004.6 黄明游 编著
92 传染病动力学的数学建模与研究 2004.8 马知恩 周义仓 王稳地 靳 祯 著
93 模李超代数 2004.9 张永正 刘文德 著
94 巴拿赫空间中算子广义逆理论及其应用 2005.1 王玉文 著
95 巴拿赫空间结构和算子理想 2005.3 钟怀杰 著
96 脉冲微分系统引论 2005.3 傅希林 闫宝强 刘衍胜 著
97 代数学中的 Frobenius 结构 2005.7 汪明义 著

98　生存数据统计分析　2005.12　王启华　著
99　数理逻辑引论与归结原理(第二版)　2006.3　王国俊　著
100　数据包络分析　2006.3　魏权龄　著
101　代数群引论　2006.9　黎景辉　陈志杰　赵春来　著
102　矩阵结合方案　2006.9　王仰贤　霍元极　麻常利　著
103　椭圆曲线公钥密码导引　2006.10　祝跃飞　张亚娟　著
104　椭圆与超椭圆曲线公钥密码的理论与实现　2006.12　王学理　裴定一　著
105　散乱数据拟合的模型方法和理论　2007.1　吴宗敏　著
106　非线性演化方程的稳定性与分歧　2007.4　马　天　汪守宏　著
107　正规族理论及其应用　2007.4　顾永兴　庞学诚　方明亮　著
108　组合网络理论　2007.5　徐俊明　著
109　矩阵的半张量积:理论与应用　2007.5　程代展　齐洪胜　著
110　鞅与 Banach 空间几何学　2007.5　刘培德　著
111　非线性常微分方程边值问题　2007.6　葛渭高　著
112　戴维-斯特瓦尔松方程　2007.5　戴正德　蒋慕蓉　李栋龙　著
113　广义哈密顿系统理论及其应用　2007.7　李继彬　赵晓华　刘正荣　著
114　Adams 谱序列和球面稳定同伦群　2007.7　林金坤　著
115　矩阵理论及其应用　2007.8　陈公宁　著
116　集值随机过程引论　2007.8　张文修　李寿梅　汪振鹏　高　勇　著
117　偏微分方程的调和分析方法　2008.1　苗长兴　张　波　著
118　拓扑动力系统概论　2008.1　叶向东　黄　文　邵　松　著
119　线性微分方程的非线性扰动(第二版)　2008.3　徐登洲　马如云　著
120　数组合地图论(第二版)　2008.3　刘彦佩　著
121　半群的 S-系理论(第二版)　2008.3　刘仲奎　乔虎生　著
122　巴拿赫空间引论(第二版)　2008.4　定光桂　著
123　拓扑空间论(第二版)　2008.4　高国士　著
124　非经典数理逻辑与近似推理(第二版)　2008.5　王国俊　著
125　非参数蒙特卡罗检验及其应用　2008.8　朱力行　许王莉　著
126　Camassa-Holm 方程　2008.8　郭柏灵　田立新　杨灵娥　殷朝阳　著
127　环与代数(第二版)　2009.1　刘绍学　郭晋云　朱　彬　韩　阳　著
128　泛函微分方程的相空间理论及应用　2009.4　王　克　范　猛　著
129　概率论基础(第二版)　2009.8　严士健　王隽骧　刘秀芳　著
130　自相似集的结构　2010.1　周作领　瞿成勤　朱智伟　著
131　现代统计研究基础　2010.3　王启华　史宁中　耿　直　主编

132　图的可嵌入性理论(第二版)　2010.3　刘彦佩　著
133　非线性波动方程的现代方法(第二版)　2010.4　苗长兴　著
134　算子代数与非交换 L_p 空间引论　2010.5　许全华　吐尔德别克　陈泽乾　著
135　非线性椭圆型方程　2010.7　王明新　著
136　流形拓扑学　2010.8　马　天　著
137　局部域上的调和分析与分形分析及其应用　2011.6　苏维宜　著
138　Zakharov 方程及其孤立波解　2011.6　郭柏灵　甘在会　张景军　著
139　反应扩散方程引论(第二版)　2011.9　叶其孝　李正元　王明新　吴雅萍　著
140　代数模型论引论　2011.10　史念东　著
141　拓扑动力系统——从拓扑方法到遍历理论方法　2011.12　周作领　尹建东　许绍元　著
142　Littlewood-Paley 理论及其在流体动力学方程中的应用　2012.3　苗长兴　吴家宏　章志飞　著
143　有约束条件的统计推断及其应用　2012.3　王金德　著
144　混沌、Mel′nikov 方法及新发展　2012.6　李继彬　陈凤娟　著
145　现代统计模型　2012.6　薛留根　著
146　金融数学引论　2012.7　严加安　著
147　零过多数据的统计分析及其应用　2013.1　解锋昌　韦博成　林金官　编著
148　分形分析引论　2013.6　胡家信　著
149　索伯列夫空间导论　2013.8　陈国旺　编著
150　广义估计方程估计方法　2013.8　周　勇　著
151　统计质量控制图理论与方法　2013.8　王兆军　邹长亮　李忠华　著
152　有限群初步　2014.1　徐明曜　著
153　拓扑群引论(第二版)　2014.3　黎景辉　冯绪宁　著
154　现代非参数统计　2015.1　薛留根　著
155　三角范畴与导出范畴　2015.5　章　璞　著
156　线性算子的谱分析(第二版)　2015.6　孙　炯　王　忠　王万义　编著
157　双周期弹性断裂理论　2015.6　李　星　路见可　著
158　电磁流体动力学方程与奇异摄动理论　2015.8　王　术　冯跃红　著
159　算法数论(第二版)　2015.9　裴定一　祝跃飞　编著
160　偏微分方程现代理论引论　2016.1　崔尚斌　著
161　有限集上的映射与动态过程——矩阵半张量积方法　2015.11　程代展　齐洪胜　贺风华　著
162　现代测量误差模型　2016.3　李高荣　张　君　冯三营　著
163　偏微分方程引论　2016. 3　韩丕功　刘朝霞　著
164　半导体偏微分方程引论　2016.4　张凯军　胡海丰　著
165　散乱数据拟合的模型、方法和理论(第二版)　2016.6　吴宗敏　著

166　交换代数与同调代数(第二版)　2016.12　李克正　著
167　Lipschitz 边界上的奇异积分与 Fourier 理论　2017.3　钱　涛　李澎涛　著
168　有限 p 群构造(上册)　2017.5　张勤海　安立坚　著
169　有限 p 群构造(下册)　2017.5　张勤海　安立坚　著
170　自然边界积分方法及其应用　2017.6　余德浩　著
171　非线性高阶发展方程　2017.6　陈国旺　陈翔英　著
172　数理逻辑导引　2017.9　冯　琦　编著
173　简明李群　2017.12　孟道骥　史毅茜　著
174　代数 K 理论　2018.6　黎景辉　著
175　线性代数导引　2018.9　冯　琦　编著
176　基于框架理论的图像融合　2019.6　杨小远　石　岩　王敬凯　著
177　均匀试验设计的理论和应用　2019.10　方开泰　刘民千　覃　红　周永道　著
178　集合论导引(第一卷：基本理论)　2019.12　冯　琦　著

(O-7915.31)

科学数理分社
电 话：(010) 64019814
Email：lijingke@mail.sciencep.com



科学出版社互联网入口

销售分类建议：高等数学

www.sciencep.com



ISBN 978-7-03-063621-8

定 价：138.00 元